ViitoriOlimpici.ro

Problema 1
Etapa 3
Clasa a IX-a

Problema 1. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ şi $(b_n)_{n\geqslant 1}$ două şiruri cu $a_1 = b_1 = \dfrac{1}{2}$ şi

$$a_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{a_1}{n(n-1)} + \frac{2a_2}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \frac{(n-1)a_{n-1}}{2\cdot 1}\right),$$
$$b_n = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n-1} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{2}\right),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Arătaţi că $a_n = b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

***

Soluţie. Vom demonstra cerinţa problemei prin inducţie matematică.

Din ipoteză avem $a_1 = b_1 = \dfrac{1}{2}$, iar pentru $n = 2$ avem $a_2 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_1}{2\cdot 1}$ şi $b_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{b_1}{2}$, adică $a_2 = b_2 = \dfrac{1}{12}$.

Presupunem că $a_k = b_k$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, este ales arbitrar şi demonstrăm că $a_n = b_n$. Avem succesiv:

$$\begin{aligned}
a_n - b_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)a_{n-k}}{k(k+1)} - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b_{n-k}}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(n-k)a_{n-k}}{(n+1)k(k+1)} + \frac{b_{n-k}}{k+1}\right) - \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{(n+1)k(k+1)} + \frac{1}{k+1}\right)\cdot b_{n-k} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_{n-k}}{k} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 0,
\end{aligned}$$

prin urmare $a_n = b_n$. Cu aceasta inducţia este încheiată.

Am folosit ipoteza de inducţie sub forma

$$b_{n-1} = \frac{1}{n} - \left(\frac{b_1}{n-1} + \frac{b_2}{n-2} + \ldots + \frac{b_{n-2}}{2}\right),$$

adică $\dfrac{1}{n} = \left(\dfrac{b_1}{n-1} + \dfrac{b_2}{n-2} + \ldots + \dfrac{b_{n-2}}{2} + \dfrac{b_{n-1}}{1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{b_{n-k}}{k}$.