Problema 1.

Fie progresiile aritmetice $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$. Să se arate că şirul $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 0}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă cel puţin una dintre progresiile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ este constantă.

Dan Brânzei

Rezolvare

Deoarece $(a_n)_{n\geq 0}$ este progresie aritmetică , putem scrie $a_n = a_0 + n \cdot r_1$, unde a_0, r_1 sunt termenul iniţial , respectiv raţia progresiei aritmetice.

În mod analog $b_n = b_0 + n \cdot r_2$, unde b_0, r_2 sunt termenul iniţial , respectiv raţia progresiei aritmetice.

Atunci $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 0}$ este progresie aritmetică d.ş.n.d $a_n \cdot b_n = a_0 \cdot b_0 + n \cdot r$. Înlocuind relaţiile anterioare obţinem $a_0 \cdot b_0 + n \cdot r = (a_0 + n \cdot r_1) \cdot (b_0 + n \cdot r_2) \Leftrightarrow$

$n \cdot r = n \cdot r_1 \cdot b_0 + n \cdot r_2 \cdot a_0 + n^2 \cdot r_1 \cdot r_2 \Leftrightarrow r = r_1 \cdot b_0 + r_2 \cdot a_0 + n \cdot r_1 \cdot r_2$, relaţie care conduce la concluzia că $r_1 = 0$ sau $r_2 = 0$, adică cel puţin una dintre progresiile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ este constantă.