Problema 3. Se dă un cub de muchie 1. Să se arate că există pe suprafaţa S a cubului un punct N care să poată fi unit cu orice alt punct al suprafeţei S printr-o linie frântă de lungime cel mult 2, situată în întregime pe suprafaţa cubului.

din cartea *M. Pimsner, S. Popa – Probleme de geometrie elementară*, EDP, Bucureşti 1979, pb 39, pag 9

Soluţia 1: (din carte)
Fie $ABCDEFGH$ cubul şi N punctul de intersecţie a diagonalelor AC şi BD. Fie P un punct arbitrar pe suprafaţa cubului. Dacă P se află pe una din feţele alăturate feţei $ABCD$, de exemplu $CDHG$, desfăşurăm suprafaţa ca în **Fig.1** şi unim cele două puncte printr-o dreaptă. Dacă $\{M\} = NP \cap (CG \cup GH \cup DH)$, atunci $NP \leq NM \leq NG \leq NQ + QG = 2$. Mai avem de studiat cazul când P se află pe faţa opusă lui $ABCD$, notată cu $EFGH$.
Ducem în patrulaterul $EFGH$ diagonalele FG şi EH. Punctul P se va afla într-unul din cele patru triunghiuri EKF, FKG, GKH şi HKE unde prin K am notat intersecţia diagonalelor EH şi FG. Să presupunem că P este în interiorul triunghiului HKG. Desfăşurăm atunci suprafaţa cubului ca în **Fig.2**. Ducem prin P o perpendiculară pe HK care intersectează pe NK în punctul Q. Avem succesiv:

$$NP \leq NQ + QP \leq NQ + QK = NK = 2.$$

Fig.1

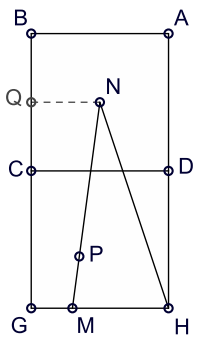
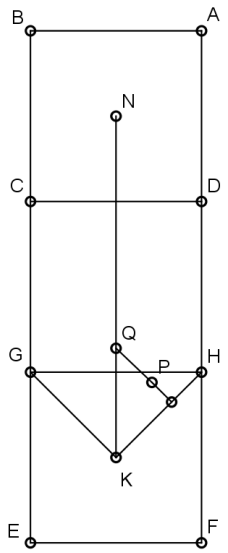
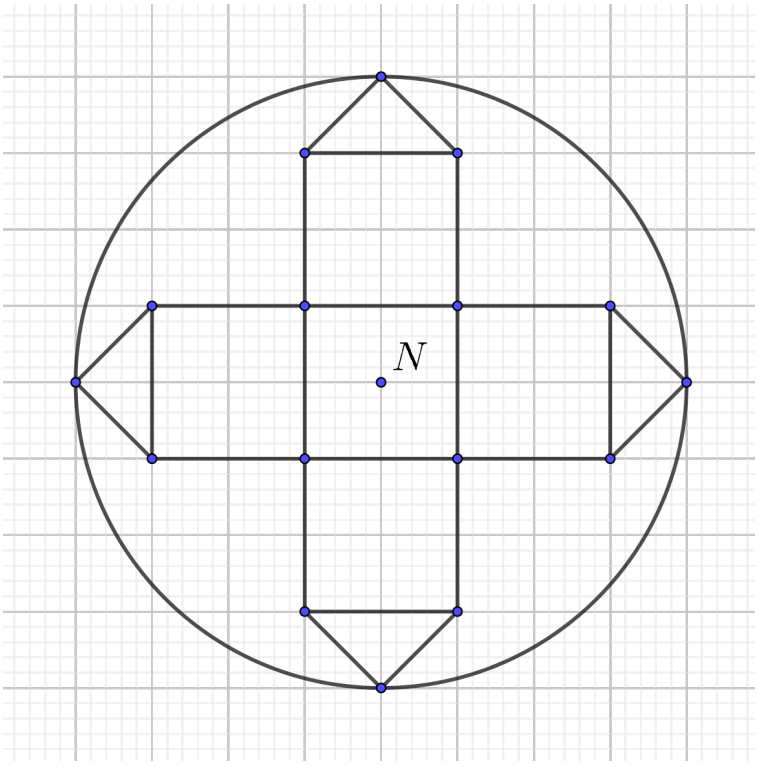


Fig.2



Soluţia 2: (schiţă)
Să considerăm un cub confecţionat din hârtie aşezat pe o masă. Alegem N ca fiind centrul feţei de jos. Tăiem suprafaţa cubului după muchiile verticale şi după diagonalele feţei de sus. Obţinem următoarea desfăşurare a cubului:



Este uşor de verificat că fiecare punct de pe suprafaţa cubului este la distanţă cel mult 2 de punctul N. (În figura de mai sus, se vede că întreagă suprafaţă desfăşurată încape în cercul cu centrul în N şi de rază 2.