Etapa 7, Problema 4

Determinaţi cel mai mic număr natural nenul n având proprietatea: *oricare ar fi n semidrepte în spaţiu având aceeaşi origine, există printre ele două care formează unghi ascuţit.*

Mihai Bălună, Baraj OIM 2001

Soluţie.

Vom arăta că numărul căutat este $n = 7$.

Considerând trei drepte concurente, două câte două perpendiculare, unghiurile formate de cele şase semidrepte care apar sunt fie drepte, fie alungite; prin urmare, $n \geq 7$.

Presupunem, prin absurd, că ar exista şapte semidrepte având aceeaşi origine, astfel încât ughiurile formate de oricare două să aibă măsuri cel puţin egale cu $90°$. Înlocuim cele şapte semidrepte cu versorii corespunzători $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_7}$ şi fie $\overrightarrow{w_i} = \overrightarrow{v_i} - a_i\overrightarrow{v_7}$, $i = \overline{1,6}$, unde $a_i = \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_7}$. Toţi vectorii $\overrightarrow{w_i}$ sunt perpendiculari pe $\overrightarrow{v_7}$, deoarece

$$\overrightarrow{w_i} \cdot \overrightarrow{v_7} = (\overrightarrow{v_i} - a_i\overrightarrow{v_7}) \cdot \overrightarrow{v_7} = \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_7} - a_i\overrightarrow{v_7} \cdot \overrightarrow{v_7} = a_i - a_i = 0.$$

Rezultă că toţi versorii $\overrightarrow{w_i}$ se află într-un plan perpendicular pe $\overrightarrow{v_7}$. În plus,

$$\overrightarrow{w_i} \cdot \overrightarrow{w_j} = (\overrightarrow{v_i} - a_i\overrightarrow{v_7}) \cdot (\overrightarrow{v_j} - a_j\overrightarrow{v_7}) = \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} - a_ia_j - a_ia_j + a_ia_j \leq \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} \leq 0,$$

$\forall 1 \leq i \leq j \leq 6$ şi cel mult unul dintre vectorii $\overrightarrow{w_i}$ este nul. Am obţinut astfel cinci vectori nenuli, coplanari, astfel încât ughiurile formate de oricare doi au măsurile cel puţin egale cu $90°$, fapt care este evident imposibil.

Soluţie alternativă.

Prezentăm în continuare soluţia **Cameliei Oprea**. Majoritatea concurenţilor au mers pe acest tip de raţionament, pierzând însă din vedere unele cazuri sau nejustificând (parte) din afirmaţiile facute.

Etapa 7, Problema 4

Camelia Oprea, clasa a X-a

Determinaţi cel mai mic număr nenul n având proprietatea: *oricare ar fi n semidrepte în spaţiu având aceeaşi origine, există printre ele două care formează unghi ascuţit.*

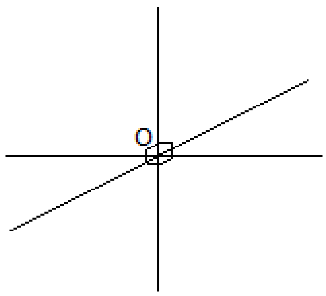
Mihai Bălună

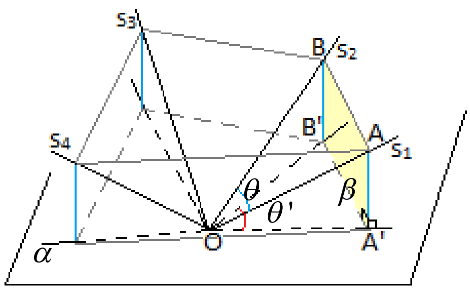
Soluţie

Pentru $n=6$ semidrepte există în spaţiu următoarea configuraţie care **nu are** proprietatea indicată: considerăm un sistem rectangular de axe de coordonate, deci 3 drepte concurente, perpendiculare două câte două, în care originea determină pe fiecare din ele câte două semidrepte, deci în total 6 semidrepte având aceeaşi origine, iar unghiul format de oricare două dintre ele nu este ascuţit. (Orice semidreaptă din cele 6, formează un unghi de 180^0 cu semidreapta aflată în prelungirea ei şi este perpendiculară pe celelalte 4 semidrepte.)

Evident că pentru $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ există configuraţii de n semidrepte care nu au proprietatea dată şi spre exemplu, pot fi obţinute eliminând semidrepte din modelul indicat pentru $n=6$.

Vom demonstra că pentru $n=7$, *oricare ar fi 7 semidrepte în spaţiu având aceeaşi origine, există printre ele două care formează unghi ascuţit.*





Având 7 semidrepte, numărul de planuri determinate de câte două dintre ele este finit ($\leq C_7^2$). Deci putem considera un plan α care să treacă prin originea O a semidreptelor şi să nu conţină niciuna dintre ele. Planul α va împărţii spaţiul în două semispaţii. Cum avem 7 semidrepte şi 2 semispaţii, conform principiului lui Dirichlet, va exista un semispaţiu care să conţină cel puţin 4 semidrepte. Ne vom referi în continuare la ele, analizând cazurile posibile:

1. Dacă 3 dintre aceste semidrepte sau toate 4 sunt situate în acelaşi plan, atunci ele se află de aceeaşi parte a dreptei determinate de intersecţia planului α cu planul ce le conţine, având originea pe această dreaptă. Ca urmare suma unghiurilor formate de cele 3, respectiv 4 semidrepte este $<180^0$, şi deci există cel puţin un unghi ascuţit între ele.

2. Dacă oricare 3 semidrepte sunt necoplanare, atunci există următoarele două posibilităţi:

2.1. 3 dintre semidrepte formează un triedru, în interiorul căruia se află a 4-a semidreaptă. Atunci ea formează cu cel puţin una dintre semidreptele ce determină triedrul, un unghi ascuţit (Observaţia 1).

2.2. Oricum am alege 3 semidrepte, a 4-a semidreaptă nu se află în interiorul triedrului determinat de ele. Atunci cele 4 semidrepte formează un "*patruedru*". În acest caz, presupunem prin reducere la absurd că niciunul dintre unghiurile formate de cele 4 semidrepte nu este ascuţit. Deci toate unghiurile sunt $\geq 90^0$. Ca urmare "*patruedrul*" format are unghiurile de pe cele 4 feţe laterale obtuze sau cel puţin drepte. Proiecţiile semidreptelor pe planul α vor determina 4 unghiuri în jurul punctului O, a căror sumă evident este 360^0. Dar cum proiecţia unui unghi $\geq 90^0$ pe un plan ce trece prin vârful lui, şi faţă de care cele două semidrepte ce îl formează sunt situate în acelaşi semispaţiu, este un unghi obtuz (Observaţia 2), rezultă că prin însumarea celor patru unghiuri proiectate obţinem mai mult de 360^0 în jurul punctului O. Ajungând la o contradicţie, înseamnă că ipoteza făcută este falsă şi deci există printre unghiurile formate de cele 4 semidrepte cel puţin unul ascuţit; ceea ce încheie demonstraţia.

În concluzie 7 este cel mai mic număr având proprietatea dată.

Observaţia 1

Oricare ar fi un triedru şi oricare ar fi o semidreaptă, cu originea în vârful triedrului, situată în interiorul acestuia, ea formează cel puţin un unghi ascuţit cu semidreptele ce determină triedrul.

Demonstraţie

Fie O vârful triedrului (originea comună a celor 4 semidrepte). Printr-un punct oarecare P aparţinând semidreptei interioare s, ducem un plan δ perpendicular pe aceasta, $\delta \perp s$, $\delta \cap s = \{P\}$. Semidreapta s fiind interioară triedrului, planul δ va intersecta cel puţin una dintre muchiile triedrului (în caz contrar s este exterioară triedrului). Fie aceasta semidreapta d şi $\{A\} = \delta \cap d \Rightarrow AP \perp PO \Rightarrow m(\angle APO) = 90^0 \Rightarrow \Delta APO$ dreptunghic $\Rightarrow m(\angle d, s) = = m(\angle AOP) < 90^0$. $_{q.e.d.}$

Observaţia 2

Fie planul α, un punct $O \in \alpha$ şi semidreptele $[Os_1$, $[Os_2$ situate în acelaşi semispaţiu faţă de planul α, care formează între ele unghiul θ. Dacă unghiul $\theta \geq 90^0$ atunci proiecţia lui pe planul α este un unghi obtuz (îl notez cu θ').

Demonstraţie

Consider un plan β perpendicular pe planul α, care intersectează semidreapta $[Os_1$ şi proiecţia ei pe planul α în punctele A respectiv A'. Rotesc planul β în jurul lui AA' până când punctele B şi B', în care planul β este înţepat de semidreapta $[Os_2$ şi proiecţia ei pe planul α, determină segmentul $[BB'] \equiv [AA']$. (1) (Evident punctele B şi B' există şi sunt unice.)

Dar cum $AA' \| BB'$ (ambele fiind $\perp \alpha$) $\Rightarrow AA'B'B$ dreptunghi $\Rightarrow AB \equiv A'B'$. (2)

Aplicând Teorema lui Pitagora în $\Delta AA'O$ şi $\Delta BB'O$ $\Rightarrow \begin{cases} AA'^2 = AO^2 - A'O^2 \\ BB'^2 = BO^2 - B'O^2 \end{cases}$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} AO^2 - A'O^2 = BO^2 - B'O^2 = AA'^2 \qquad (3)$$

Din Teorema cosinusului în ΔAOB şi $\Delta A'OB'$ $\Rightarrow \begin{cases} AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\theta \\ A'B'^2 = A'O^2 + B'O^2 - 2A'O \cdot B'O \cdot \cos\theta' \end{cases}$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\theta = A'O^2 + B'O^2 - 2A'O \cdot B'O \cdot \cos\theta'$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \underbrace{AO^2 - A'O^2}_{AA'^2} + \underbrace{BO^2 - B'O^2}_{AA'^2} + 2(A'O \cdot B'O \cdot \cos\theta' - AO \cdot BO \cdot \cos\theta) = 0 \quad \Big| :2$$

$$\Rightarrow AA'^2 + A'O \cdot B'O \cdot \cos\theta' - AO \cdot BO \cdot \cos\theta = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow\ \cos\theta' = \dfrac{-AA'^2 + AO\cdot BO\cdot\cos\theta}{A'O\cdot B'O} \\ \text{dar}\ \ 90^0 \le \theta \le 180^0 \ \Rightarrow\ \cos\theta \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \cos\theta' < 0\ \Rightarrow\ \theta' > 90^0.\ _{q.e.d.}$$

Observația 3

Definim *patruedrul*, prin analogie cu triedrul, ca fiind figura geometrică formată din 4 semidrepte ce au originea comună şi sunt situate în acelaşi semispațiu față de un plan ce trece prin originea semidreptelor. Semidreptele sunt oricare trei necoplanare şi oricare semidreaptă din cele patru nu este situată în interiorul triedrului determinat de celelalte 3.

Observația 4

Cazul 2.2 şi demonstrația de la Observația 2 pot fi urmărite pe desenul ataşat pe prima pagină, (care conține câteva linii în plus). Desenul l-am făcut pentru o primă variantă pe care apoi am simplificat-o. Dar am păstrat desenul nesimplificat, pentru că el sugerează mai bine imaginea în spațiu a cazului studiat.