P4. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă şi mărginită. Arătaţi că dacă f'' este mărginită, atunci şi f' este mărginită, şi dacă notăm $M_k = sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(k)}(x)|$, atunci are loc inegalitatea

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 \cdot M_2}\,.$$

R: Pentru orice $a, x \in \mathbb{R}$ există $c \in (a, x)$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(c)}{2} \cdot (x - a)^2$$

Atunci

$$\frac{M_2}{2} \cdot (x - a)^2 + f'(a) \cdot (x - a) + M_0 \geq$$

$$\geq \frac{f''(c)}{2} \cdot (x - a)^2 + f'(a) \cdot (x - a) + f(a) = f(x) \geq -M_0\,,\ (\forall)a, x \in \mathbb{R}$$

şi

$$\frac{M_2}{2} \cdot (x - a)^2 + f'(a) \cdot (x - a) + 2M_0 \geq 0\,,\ (\forall)a, x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că $f'(a)^2 - 4M_0M_2 \leq 0$, $(\forall)a \in \mathbb{R}$, astfel că f' este mărginită şi

$$M_1 = sup\{|f'(a)|\,|\,a \in \mathbb{R}\} \leq 2\sqrt{M_0M_2}.$$