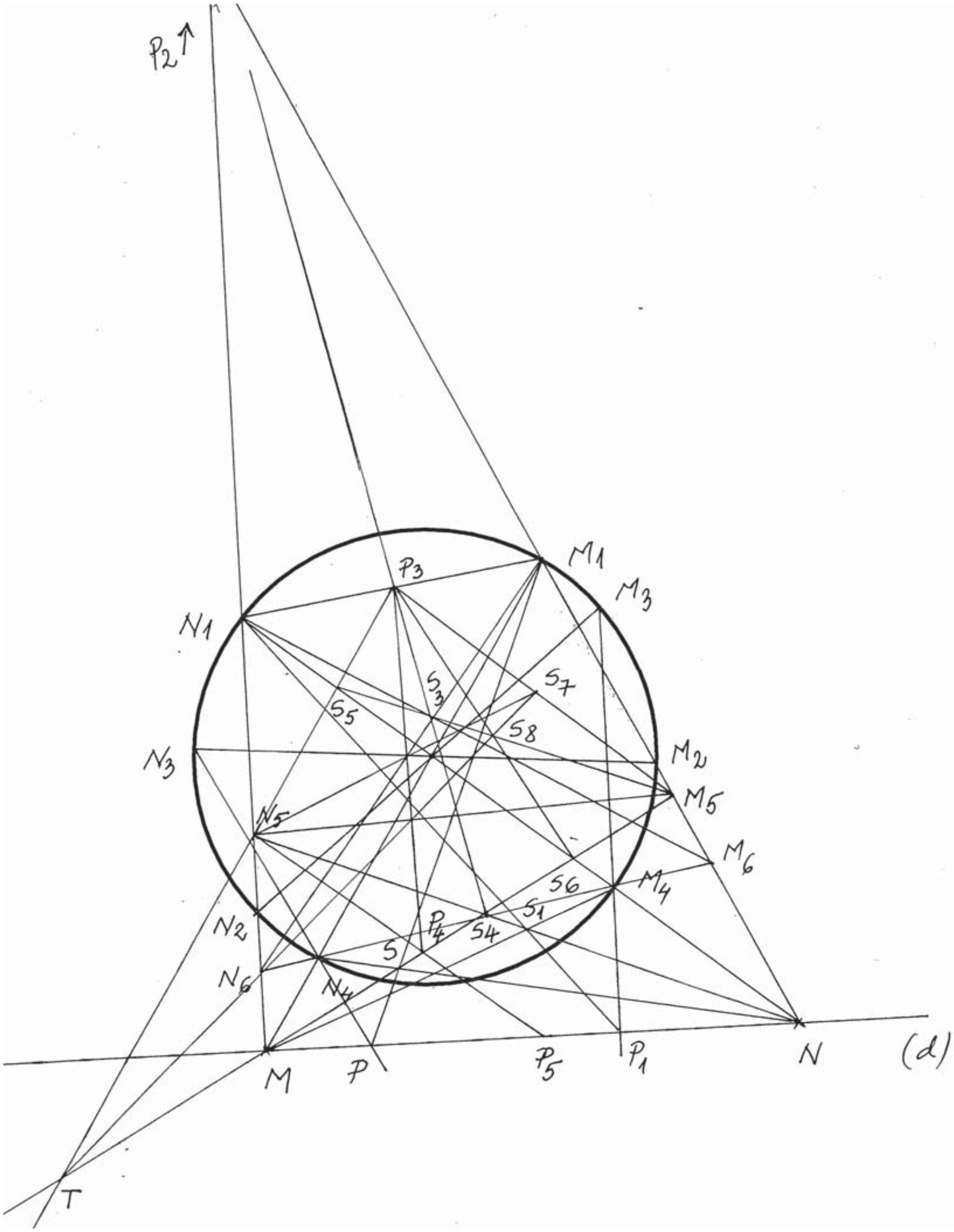
Problema 4. **Fie dat un cerc de centru O, $\mathcal{C}(O)$, şi o dreaptă d exterioară acestuia. Pe d se iau două puncte oarecare M şi N. Cu rigla negradată să se construiască mijlocul segmentului $[MN]$.**

Niţă Cristi



Se unesc punctele M şi N cu O şi în prelungirea segmentelor $[MO]$ şi

$[NO]$ se obţin punctele M_1, respectiv N_1 ($\{M_1\}, \{N_1\} \in \mathcal{C}(O)$).

Unind perechile de puncte (M, N_1) şi (M_1, N) obţinem punctele $\{M_2\} = M_1N \cap \mathcal{C}(O)$, respectiv $\{N_2\} = MN_1 \cap \mathcal{C}(O)$.

Construim punctele diametral opuse punctelor M_2 şi N_2, pe care le notăm cu N_3, respectiv M_3.

Fie $\{M_4\} = NO \cap \mathcal{C}(O)$, $\{M_4\} \in [NO]$.

Fie $\{N_4\} = MO \cap \mathcal{C}(O)$, $\{N_4\} \in [MO]$.

Deoarece perechile de puncte (M_1, M_2) şi (N_4, N_3) sunt diametral opuse $\Rightarrow M_1M_2 \| N_4N_3$. Fie $\{P\} = N_4N_3 \cap MN$.

În ΔMM_1N, în care $N_4P \| NM_1$, construim cevienele M_1P, NN_4, MM_5, concurente în S. Aplicând teorema lui Ceva avem $\dfrac{N_4M}{N_4M_1} \cdot \dfrac{M_5M_1}{M_5M} \cdot \dfrac{PN}{PM} = 1$ şi cum $\dfrac{N_4M}{N_4M_1} = \dfrac{PM}{PN}$ (deoarece $N_4P \| NM_1$) $\Rightarrow \dfrac{M_5M_1}{M_5N} = 1 \Rightarrow M_5$ este mijlocul segmentului $[M_1N]$ **(1)**.

Analog, deoarece perechile de puncte (M_3, M_4) şi (N_2, N_1) sunt diametral opuse $\Rightarrow M_3M_4 \| N_1N_2$. Fie $\{P_1\} = M_3M_4 \cap MN$.

În ΔNN_1M, în care $M_4P \| N_1M$, construim cevienele N_1P_1, MM_4, NN_5, concurente în S_1. Aplicând teorema lui Ceva avem $\dfrac{M_4N}{M_4N_1} \cdot \dfrac{N_5N_1}{N_5M} \cdot \dfrac{P_1M}{P_1N} = 1$ şi cum $\dfrac{N_1M_4}{NM_4} = \dfrac{MP_1}{NP_1}$ (deoarece $M_4P_1 \| N_1M$), obţinem $\dfrac{N_5N_1}{N_5M} = 1 \Rightarrow N_5$ este mijlocul segmentului $[N_1M]$ **(2)**.

Fie acum $\{M_6\} = N_4M_4 \cap NM_1$ şi $\{N_6\} = N_4M_4 \cap MN_1$. Deoarece perechile de puncte (N_4, M_4) şi (M_1, N_1) sunt diametral opuse $\Rightarrow N_4M_4 \| M_1N_1 \Rightarrow N_6M_6 \| M_1N_1$.

Fie $\{P_2\} = MN_1 \cap NM_1$.

În $\Delta P_2N_6M_6$, în care $N_1M_1 \| N_6M_6$, construim cevienele N_1M_6, M_1N_6, P_2S_4, concurente în S_3. Aplicând teoreme lui Ceva avem $\dfrac{N_1N_6}{N_1P_2} \cdot \dfrac{M_1P_2}{M_1M_6} \cdot \dfrac{S_4M_6}{S_4N_6} = 1$ şi cum $\dfrac{N_1P_2}{N_1N_6} = \dfrac{M_1P_2}{M_1M_6}$ (deoarece $N_1M_1 \| N_6M_6$), obţinem $\dfrac{S_4M_6}{S_4N_6} =$

$1 \Rightarrow P_2S_4$ este mediană în $\Delta P_2M_6N_6$.

Dacă notăm $\{P_3\} = P_2S_4 \cap N_1M_1 \Rightarrow P_2P_3$ este mediană în $\Delta P_2N_1M_1 \Rightarrow$ P_3 este mijlocul segmentului $[N_1M_1]$ **(3)**.

În patrulaterul MNM_1N_1, M_5, P_3 şi N_5 sunt mijloacele laturilor $[M_1N]$, $[M)_1N_1]$, respectiv $[N_1M]$ (vezi relaţiile **(1), (2), (3)**).

Deoarece P_3M_5 este linie mijlocie în $\Delta M_1N_1N \Rightarrow P_3M_5 \| N_1N$.

Cum N_5 este mijlocul laturii $[MN_1]$ rezultă că ar trebui să construim o paralelă la P_3M_5 (care va fi paralelă şi la N_1N) astfel încât să obţinem mijlocul laturii $[MN]$.

Fie $\{T\} = P_3N_5 \cap M_5M$, $\{S_5\} = P_3T \cap N_1N$, $\{S_6\} = M_5T \cap N_1N$.

Deoarece $N_1N \| P_3M_5 \Rightarrow$ în ΔTP_3M_5 avem $S_5S_6 \| P_3M_5$.

În ΔTP_3M_5 construim cevienele TS_7, P_3S_6, M_5S_5, concurente în S_8.

Aplicând teorema lui Ceva avem $\dfrac{S_5P_3}{S_5T} \cdot \dfrac{S_6T}{S_6M_5} \cdot \dfrac{S_7M_5}{S_7P_3} = 1$ şi cum $\dfrac{S_5P_3}{S_5T} = \dfrac{S_6M_5}{S_6T}$ (deoarece $S_5S_6 \| P_3M_5$) obţinem $\dfrac{S_7M_5}{S_7P_3} = 1 \Rightarrow TS_7$ este mediană în ΔTP_3M_5.

În ΔTP_3M_5 trasăm cevienele TS_7 (deja construită!), P_3P_4, N_5M_5, concurente în S_9. Aplicând teorema lui Ceva avem $\dfrac{S_7P_3}{S_7M_5} \cdot \dfrac{P_4M_5}{P_4T} \cdot \dfrac{N_5T}{N_5P_3} = 1$ şi cum $\dfrac{S_7P_3}{S_7M_5} = 1$ va rezulta că $\dfrac{P_4M_5}{P_4T} = \dfrac{P_3N_5}{TN_5} \Rightarrow N_5P_4 \| P_3M_5$.

Fie $\{P_5\} = N_5P_4 \cap MN$.

Deoarece $N_5P_4 \| MN \Rightarrow N_5P_4 \| NN_1 \Rightarrow N_5P_5 \| NN_1$ şi cum N_5 este mijlocul laturii $[MN_1]$ va rezulta că, în ΔMNN_1, P_5 este mijlocul laturii $[MN]$, ceea ce trebuia demonstrat.

$\blacksquare$