Etapa 4, Problema 2

Determinaţi numerele $x \in (0,1)$ care verifică ecuaţia

$$\frac{3x-1}{\sqrt{2x}+\sqrt{1-x}} = \lg\frac{1-x}{2x}.$$

***

Soluţie.

Observăm că $\dfrac{3x-1}{\sqrt{2x}+\sqrt{1-x}} = \dfrac{(3x-1)\left(\sqrt{2x}-\sqrt{1-x}\right)}{2x-1+x} = \sqrt{2x} - \sqrt{1-x}$.

Ecuaţia dată revine la $\sqrt{2x}-\sqrt{1-x} = \lg(1-x) - \lg 2x$, adică

$$\sqrt{2x}+\lg(2x) = \sqrt{1-x}+\lg(1-x).$$

Funcţia $f:(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{t}+\lg t$ este strict crescătoare, deci injectivă. Relaţia anterioară este echivalentă cu $f(2x) = f(1-x)$, de unde $2x = 1-x$.

Astfel, singura soluţie a ecuaţiei din enunţ este $x = \frac{1}{3}$.

Soluţie alternativă (**Ştefan Obadă**, Iaşi)**.**

Dacă $x < \frac{1}{3}$, membrul stâng este negativ şi membrul drept este pozitiv, deci egalitatea din enunţ nu este adevărată.

Dacă $x > \frac{1}{3}$, membrul stâng este pozitiv şi membrul drept este negativ, deci egalitatea din enunţ nu este adevărată.

Pentru $x = \frac{1}{3}$ obţinem egalitatea $0 = 0$, prin urmare singura soluţie a ecuaţiei date este $x = \frac{1}{3}$.