Problema 1. Determinaţi numărul soluţiilor $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ale sistemului $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 100 \\ \sqrt[4]{10} < 2^{\frac{1}{y}} \cdot 5^{\frac{1}{x}} \leqslant \sqrt{10} \end{cases}$, cu proprietatea că $x_0 \in \mathbb{Z}$ sau $y_0 \in \mathbb{Z}$.

Cristian Heuberger

Soluţie. Logaritmând în baza 10, rezultă:

$$x \lg 2 + y \lg 5 = 2 \quad (1) \qquad \text{şi} \qquad \frac{1}{4} < \frac{1}{y} \lg 2 + \frac{1}{x} \lg 5 \leqslant \frac{1}{2}. \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{x \lg 2 + y \lg 5}{xy} \leqslant \frac{1}{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{4} < \frac{2}{xy} \leqslant \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Din (3) rezultă că $xy > 0$ şi apoi că $4 \leqslant xy < 8$. (4)

Din (1) obţinem $y = \dfrac{2 - x \lg 2}{\lg 5}$. Înlocuind în (4), deducem că $x \in [2, 2\log_2 5]$. Analog rezultă că $y \in [2\log_5 2, 2]$.

Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $x \in \{2, 3, 4\}$ şi obţinem soluţiile $(2, 2)$, $\left(3, \dfrac{2 - 3\lg 2}{\lg 5}\right)$, $\left(4, \dfrac{2 - 4\lg 2}{\lg 5}\right)$.

Dacă $y \in \mathbb{Z}$, atunci $y \in \{1, 2\}$ şi obţinem soluţiile $\left(\dfrac{2 - \lg 5}{\lg 2}, 1\right)$, $(2, 2)$.

Există 4 soluţii distincte cu proprietatea din enunţ.