Ediția a XV-a
Etapa 5
Clasa a VIII-a
Problema 2

Problema 2 Determinaţi toate numerele întregi pozitive *k* pentru care, pentru orice numere pozitive *a*, *b* şi *c*, care verifică inegalitatea $k(ab+bc+ac)\ge 5(a^2+b^2+c^2)$, există un triunghi cu lungimile laturilor *a*, *b* şi *c*.

Soluţie

Din $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$, deducem că $k\ge 6.$

Cum nu există triunghiuri cu laturile $1,1,2$, rezultă că $k(1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2)\le 5(1^2+1^2+2^2)\Rightarrow k\le 6.$

Vom arăta că $k=6$ satisface cerinţa.

Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $a\le b\le c$. Trebuie să arătăm că există triunghiuri cu laturile *a*,*b* şi *c* $\Leftrightarrow$ $c<a+b$.

Din $5(a^2+b^2+c^2)<6(ab+bc+ac)\Rightarrow c^2-\frac{6}{5}c(a+b)+a^2+b^2-\frac{6}{5}ab<0\Rightarrow$

$$\left(c-\frac{3(a+b)}{5}\right)^2\le -\frac{16}{25}(a+b)^2+\frac{16ab}{5}=\frac{-16(a+b)^2+80ab}{25}\le\frac{16}{25}ab\le\frac{4}{25}(a+b)^2\Rightarrow c<a+b.$$