Problema 3

Într-o școală sunt $2n$ elevi $\left(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\right)$. În fiecare săptămână n elevi merg într-o excursie. După mai multe excursii s-a observat că oricare doi elevi au fost împreună în cel puțin o excursie. Care este numărul minim de excursii necesare pentru a se putea întâmpla acest lucru?

American Mathematical Competitions

Soluție:

Fie x_i numărul de excursii în care a fost elevul E_i, $i = \overline{1,\ 2n}$ și N numărul total de excursii desfășurate. Deoarece în fiecare excursie merg exact n elevi avem

$$N = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n}}{n}.$$

Un elev întâlnește alți $n-1$ elevi într-o excursie, deci trebuie să meargă în cel puțin trei excursii pentru a-i cunoaște pe ceilalți $2n-1$ colegi din școală $\left(\ 2n-1 = \left(n-1\right) + \left(n-1\right) + 1\ \right)$.

Așadar $x_i \geq 3$, $\forall i = \overline{1,\ 2n}$ și atunci $N \geq \dfrac{3+3+\ldots+3}{n} = \dfrac{3 \cdot 2n}{n}$, adică $N \geq 6$.

Construim un exemplu de 6 excursii astfel încât oricare doi elevi să meargă împreună în cel puțin o excursie. Demonstrăm mai întâi următorul rezultat:

Lemă: Orice număr natural n, $n \neq 1$, se poate scrie sub forma $n = 2x + 3y$ cu $x, y \in \mathbb{N}$.

Demonstrația lemei: Din teorema împărțirii cu rest avem $n = 3k + r$ unde $k \in \mathbb{N}$ și $r \in \{0,\ 1,\ 2\}$.

Dacă $r = 0$ avem $n = 3k \ \Rightarrow\ n = 2 \cdot 0 + 3 \cdot k$, iar dacă $r = 2$ avem $n = 3k + 2 \ \Rightarrow\ n = 2 \cdot 1 + 3 \cdot k$.

Dacă $r = 1$ avem $n = 3k + 1$. Cum $n \neq 1$ avem $k \geq 1$ și atunci putem scrie $n = 3\left(k-1\right) + 4$, adică $n = 2 \cdot 2 + 3 \cdot \left(k-1\right)$, ceea ce încheie demonstrația lemei.

Revenind la problema noastră, scriem numărul n sub forma $n = 2x + 3y$ cu $x, y \in \mathbb{N}$.

În școală avem $2n = 4x + 6y$ elevi pe care îi împărțim în 10 grupe astfel: 4 grupe cu câte x elevi fiecare și 6 grupe cu câte y elevi fiecare. Dacă $x = 0$ sau $y = 0$ grupele respective sunt vide.

Fie A, B, C, D cele 4 grupe cu câte x elevi și E, F, G, H, I, J cele 6 grupe cu câte y elevi.

Organizăm cele 6 excursii astfel:

$\left(A,B,E,F,G\right)$; $\left(C,D,E,F,H\right)$; $\left(A,C,G,H,I\right)$; $\left(B,D,G,H,J\right)$; $\left(A,D,E,I,J\right)$; $\left(B,C,F,I,J\right)$.

Se observă ușor că sunt îndeplinite cerințele problemei.

BAREM: Demonstrează $N \geq 6$ .... 3 puncte

Construcția unui exemplu de 6 excursii .... 4 puncte