P4. Pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $k \in \mathbb{Z}$ fie $S(n,k)$ numărul partiţiilor unei mulţimi cu n elemente în k submulţimi.
a) Arătaţi că au loc egalităţile

$$S(m,0) = S(0,m) = \begin{cases} 1 & , \text{ dacă } m = 0 \\ 0 & , \text{ dacă } m > 0 \end{cases}$$

$$S(n,k) = 0 \quad , \text{ dacă } k < 0 \text{ sau } k > n$$

$$S(n,k) = k \cdot S(n-1,k) + S(n-1,k-1) \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Determinaţi funcţiile generatoare f_k, definite prin $f_k(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} S(n,k) x^n$, şi găsiţi expresiile numerelor $S(n,1)$, $S(n,2)$, $S(n,3)$, $S(n,4)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.