Problema 3. Pe fiecare dintre feţele unui cub se scrie câte un număr natural nenul. Fiecărui vârf al cubului i se asociază produsul numerelor scrise în cele trei feţe care conţin respectivul vârf. Suma numerelor asociate celor opt vârfuri ale cubului este 2013. Care sunt valorile posibile ale sumei numerelor scrise pe cele şase feţe?

Concursul Náboj, Cehia şi Slovacia, 2011, prelucrare

Soluţie: Dacă notăm cu x, y, z numerele scrise pe cele trei feţe care conţin vârful A al cubului şi cu x', y' şi respectiv z' numerele scrise pe feţele opuse acestora (x' şi x sunt scrise pe feţe opuse şi la fel y, y' şi z, z'), atunci în cele opt vârfuri ale cubului sunt scrise numerele xyz, xyz', $xy'z$, $xy'z'$, $x'yz$, $x'yz'$, $x'y'z$ şi $x'y'z'$. Suma acestora este $(x+x')(y+y')(z+z') = 2013$. Deoarece $x+x'$, $y+y'$ şi $z+z'$ sunt numere naturale mai mari ca 1, iar unica scriere a lui 2013 ca produs de trei numere naturale mai mari ca 1 este $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, rezultă că numerele $x+x'$, $y+y'$ şi $z+z'$ sunt tocmai numerele 3, 11 şi 61 (într-o anumită ordine), deci singura valoare posibilă a sumei $x+x'+y+y'+z+z'$ este $3+11+61 = 75$.
Această valoare chiar se poate obţine, de exemplu dacă pe feţele cubului scriem, pe perechi de feţe opuse, numerele 1 şi 2, 5 şi 6, 11 şi 50.

Remarcă: O variantă plană a acestei probleme s-a dat la Olimpiadă în Austria, în 2009.