P4. Fie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=cos(x)+sin(x\sqrt{2})$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. Determinaţi imaginea funcţiei f şi arătaţi că f nu este periodică.

R: Deoarece $\frac{2\pi\sqrt{2}}{2\pi}=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, mulţimea $\{2k\pi\sqrt{2}-2l\pi|\,k,l\in\mathbb{Z}\}$ este densă în $\mathbb{R}$. Există atunci şiruri de numere întregi $(k_n^+)_{n\geq1}$, $(k_n^-)_{n\geq1}$, $(l_n^+)_{n\geq1}$ şi $(l_n^-)_{n\geq1}$, astfel încât

$$\left|2k_n^+\pi\sqrt{2}-2l_n^+\pi-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{1}{n}\,,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*,$$

respectiv

$$\left|2k_n^-\pi\sqrt{2}-2l_n^-\pi+\frac{\pi}{2}\right|<\frac{1}{n}\,,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*.$$

Atunci

$$|f(2k_n^+\pi)-2|=\left|sin(2k_n^+\pi\sqrt{2})-sin\left(2l_n^+\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|<\left|2k_n^+\pi\sqrt{2}-2l_n^+\pi-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{1}{n}\,,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*,$$

respectiv

$$|f(2k_n^-\pi)+2|=\left|sin(2k_n^-\pi\sqrt{2})-sin\left(2l_n^-\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right|<\left|2k_n^-\pi\sqrt{2}-2l_n^-\pi+\frac{\pi}{2}\right|<\frac{1}{n}\,,\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*.$$

Cum f este continuă, rezultă că $\left(-2+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right)\subseteq Im(f)$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ şi deci $(-2,2)\subseteq Im(f)$.
Deoarece $|f(x)|=|cos(x)+sin(x\sqrt{2})|\leq|cos(x)|+|sin(x\sqrt{2})|\leq1+1=2$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$, avem că $Im(f)\subseteq[-2,2]$.
Dacă $2\in Im(f)\Longrightarrow(\exists)x\in\mathbb{R}:f(x)=2\Longrightarrow(\exists)k,l\in\mathbb{Z}:x=2k\pi\wedge x\sqrt{2}=2l\pi+\frac{\pi}{2}$. Dar atunci $\sqrt{2}=\frac{2l+\frac{1}{2}}{2k}\in\mathbb{Q}$ ceea ce este absurd. Prin urmare, $2\notin Im(f)$.
Analog, $-2\notin Im(f)$. Rezultă că $Im(f)=(-2,2)$.
Să presupunem acum că f ar fi periodică, şi fie $T>0$ o perioadă a sa. Cum f este derivabilă , f' şi f'' vor fi de asemenea periodice de perioadă T:

$$f(x)=f(x+T),(\forall)x\in\mathbb{R}\Longrightarrow f'(x)=f'(x+T),(\forall)x\in\mathbb{R}\Longrightarrow f''(x)=f''(x+T),(\forall)x\in\mathbb{R}.$$

Rezultă că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ au loc egalităţile

$$(1)\quad cos(x)+sin(x\sqrt{2})=cos(x+T)+sin(x\sqrt{2}+T\sqrt{2}),$$

$$(2)\quad -sin(x)+\sqrt{2}cos(x\sqrt{2})=-sin(x+T)+\sqrt{2}cos(x\sqrt{2}+T\sqrt{2}),$$

$$(3)\quad -cos(x)-2sin(x\sqrt{2})=-cos(x+T)-2sin(x\sqrt{2}+T\sqrt{2}).$$

Înmulţind relaţia (1) cu 2 şi adunând-o la relaţia (3), obţinem că

$$cos(x)=cos(x+T)\quad,\ (\forall)x\in\mathbb{R},$$

de unde cu ajutorul relaţiei (1) deducem că şi

$$sin(x\sqrt{2})=sin(x\sqrt{2}+T\sqrt{2})\quad,\ (\forall)x\in\mathbb{R}.$$

Dar atunci rezultă că există $m,n\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $T=2m\pi$ şi $T\sqrt{2}=2n\pi$. Obţinem că

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}\,,$$

ceea ce este absurd. Presupunerea făcută este atunci greşită, deci f nu este periodică.