Etapa 1, Problema 3

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi numerele reale nenegative $x_1, x_2, ..., x_n$ cu proprietatea că $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 3n^2$. Demonstraţi că

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)^3 \geq 9n\left(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n\right).$$

Lucian Tuţescu şi Ionuţ Ivănescu, Recreaţii Matematice 2/2013

Soluţie.

Inegalitatea este echivalentă cu

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)^6 \geq 27\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)\left(x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n\right)^2$$

şi rezultă aplicând inegalitatea mediilor numerelor $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n$ şi $x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n$. (Dacă unul dintre aceste trei numere este egal cu zero, inegalitatea este evidentă, deci putem presupune că numerele cărora le aplicăm inegalitatea mediilor sunt pozitive.)

Egalitatea se atinge atunci când $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = 3n^2$.