

COMENTARIILE OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2014 ETAPA JUDEȚEANĂ ȘI A MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

ABSTRACT. Comments on some of the problems presented at the 2014 District Round of the National Mathematics Olympiad.

Se adresează claselor V, VI, VII, VIII.

Data: 10 martie 2014.

Autor: Dan Schwarz, București.

1. INTRODUCERE

Aceste comentarii asupra Etapei Județene și a Municipiului București a Olimpiadei de Matematică 2014 reflectă opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.¹

Voi indica prin culoarea **roșie** eventualele erori, sau notațiile abuzive din enunțurile originale, și prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsește din enunț sau soluție). Voi folosi în mod predilect și culoarea **albastră** pentru comentariile de natură personală.

2. CLASA A V-A

Subiectul (1). *Determinați numerele de forma \overline{abc} care verifică relația*

$$b \cdot \overline{ac} = c \cdot \overline{ab} + 10.$$

G.M.-B.

Soluție. Relația $b \cdot \overline{ac} = c \cdot \overline{ab} + 10$ scriindu-se $b(10a + c) = c(10a + b) + 10$, deci $ba = ca + 1$, vom avea $a(b - c) = 1$, de unde $a = 1$ și $b = c + 1$. Numerele sunt deci $\boxed{110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198}$.

Probabil că problema dorea doar să verifice dacă se știe ce înseamnă scrierea în baza 10 dată de $\overline{ab\dots z}$. Cam subțire ... \square

Subiectul (2). *Fie M mulțimea numerelor palindrom de forma $5n + 4$, unde $n \in \mathbb{N}$. (Un număr natural se numește **palindrom** dacă este egal cu răsturnatul său. De exemplu, numerele 7, 191, 23532, 3770773 sunt numere palindrom. **Trebuie dat și un exemplu cu număr par de cifre, ca 375573.**)*

a) *Dacă scriem în ordine crescătoare elementele mulțimii M , stabiliți care este al 50-lea număr scris.*

b) *Determinați cel mai mic și cel mai mare dintre elementele mulțimii M care se scriu cu cifre nenule și au suma cifrelor 2014.*

¹Lipsește unele probleme, la care nu am văzut interesul de a fi prezentate. Le găsiți pe toate (postate în timp record – bravo!), ca și rezultatele, la <http://ssmr.ro/bareme>.

Soluție. Numerele din M sunt de forma $d, \overline{dd_1d_2 \dots d_k d_k \dots d_2 d_1 d}$, sau încă $\overline{dd_1d_2 \dots d_k d_{k+1} d_k \dots d_2 d_1 d}$, cu $d \in \{4, 9\}$ și $k \in \mathbb{N}$.

a) Avem deci 2 numere de o cifră, 2 numere de 2 cifre, 20 de numere de 3 cifre, 20 de numere de 4 cifre; în total 44 până acum. Al șaselea număr de 5 cifre este evident $\boxed{40504}$.

b) Pentru a avea un număr mare, trebuie să folosim cât mai multe cifre. Răspunsul este deci $\boxed{4 \underbrace{11 \dots 11}_{\text{de 2006 ori}} 4}$. Pentru a avea un număr mic, trebuie să

folosim cât mai puține cifre. Răspunsul este deci $\boxed{98 \underbrace{99 \dots 99}_{\text{de 220 ori}} 89}$.

Îmi cer scuze pentru prezentarea laconică, dar problema nu-mi place. \square

Subiectul (3). *Se consideră mulțimea $A = \{1, 3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{2014}\}$. Spunem că se realizează o **partiție** a lui A dacă mulțimea A este scrisă ca o reuniune de submulțimi nevide ale sale, disjuncte două câte două.*

a) *Demonstrați că nu există o partiție a lui A astfel încât produsul elementelor fiecărei submulțimi din partiție să fie pătrat perfect.*

b) *Arătați că există o partiție a lui A astfel încât suma elementelor fiecărei submulțimi din partiție să fie pătrat perfect.*

Soluție. a) Produsul elementelor mulțimii A este $3^{0+1+\dots+2014} = 3^{1007 \cdot 2015}$, care nu este pătrat perfect. Dacă o astfel de partiție ar exista, produsul elementelor lui A ar fi egal cu produsul produselor elementelor claselor partiției, care ar fi pătrat perfect.

b) Din moment ce $3^{2k} + 3^{2k+1} = (2 \cdot 3^k)^2$ pentru orice k natural, putem exhiba partiția dată de dubletoanele $\{3^{2k}, 3^{2k+1}\}$ pentru $0 \leq k \leq 1006$ și singletonul $\{3^{2014}\}$. Un alt model pare greu (sau chiar imposibil) de dat.

Ar fi fost doar o țără mai taxant dacă se cerea răspunsul la fiecare întrebare, în loc să fie oferit. \square

Subiectul (4). *Un număr natural de 10 cifre se numește **dichisit** dacă cifrele sale aparțin mulțimii $\{1, 2, 3\}$ și oricare două cifre consecutive diferă prin 1.*

a) *Arătați că un număr dichisit conține în scrierea sa exact 5 cifre de 2.*

b) *Stabiliți câte numere dichisite există.*

c) *Demonstrați că suma tuturor numerelor dichisite se divide cu 1408.*

Soluție. a) Cifre consecutive au paritate diferită, deci (cum există doar cifra pară 2) cifra 2 apare de exact cinci ori (alternativ).

b) Structura fiind $\overline{2*2*2*2*2*}$ sau $\overline{*2*2*2*2*2}$, unde "pozițiile" $*$ sunt ocupate în mod indiscriminat de 1 sau 3, vor exista $2^5 + 2^5 = \boxed{64}$ astfel de numere.

c) Soluția oficială propune gruparea elegantă a unui număr $\overline{a_1 a_2 \dots a_{10}}$ cu numărul (diferit) $\overline{(4 - a_1)(4 - a_2) \dots (4 - a_{10})}$, cu suma lor fiind $4 \cdot \frac{10^{10} - 1}{10 - 1}$.

Atunci suma tuturor numerelor va fi $2^7 \cdot \frac{10^{10} - 1}{10 - 1}$. Avem factorizarea $10^{10} - 1 = (10 - 1)(10 + 1)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1)(10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$ de unde $2^7 \cdot \frac{10^{10} - 1}{10 - 1} = 2^7 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091$, iar $\boxed{1408 = 2^7 \cdot 11}$ (așadar ceilalți factori sunt irelevanți, și nu trebuiau neapărat calculați).

Alternativ, suma acestor numere poate fi calculată observând că, pe fiecare din cele 10 poziții ale celor 64 de numere, cifrele 1 și 3 apar de 16 ori, iar cifra 2 apare de 32 de ori. Atunci suma totală este

$$(16(1 + 3) + 32 \cdot 2)(1 + 10 + \dots + 10^9) = 2^7 \cdot \frac{10^{10} - 1}{10 - 1}.$$

Păi, altfel decât calculând suma tuturor numerelor, cum oare ajungem la divizibilitatea cerută? Iarăși o întrebare "parțială" ... mai bine se cerea *franș* calcularea sumei. \square

3. CLASA A VI-A

Subiectul (1). *Arătați că:*

$$\begin{aligned} a) & \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1; \\ b) & 3^{33} + 4^{33} + 5^{33} < 6^{33}. \end{aligned}$$

G.M.-B.

Soluție. Ambele puncte sunt bazate pe foarte cunoscuta și ușor de verificat egalitate $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Punctul a) este chiar această relație, iar punctul b) provine din faptul că $x^{33} < x^3$ pentru orice număr real pozitiv subunitar.

Este caraghioasă folosirea numărului 33. Pe vremea când eram eu copil, circula expresia – la doctor – acesta, cu stetoscopul la ureche, te îndemna "zi trezecișitrei!", ca să te asculte mai bine la plămâni. \square

Subiectul (2). *Spunem că mulțimea M de cardinal $n > 0$ are proprietatea \mathcal{P} dacă elementele sale sunt numere naturale care au exact 4 divizori pozitivi. Notăm cu S_M suma tuturor celor $4n$ divizori pozitivi ai elementelor unei astfel de mulțimi M (suma poate conține și termeni care se repetă).²*

a) *Arătați că $A = \{2 \cdot 37, 19 \cdot 37, 29 \cdot 37\}$ are proprietatea \mathcal{P} și $S_A = 2014$.*

b) *În cazul în care o mulțime B are proprietatea \mathcal{P} și $8 \in B$, demonstrați că $S_B \neq 2014$.*

Soluție. Numerele naturale având exact 4 divizori pozitivi sunt de forma p^3 (cu divizorii $1, p, p^2, p^3$) sau pq (cu divizorii $1, p, q, pq$), cu p, q prime.

a) Așadar A are proprietatea \mathcal{P} , iar suma celor 12 divizori pozitivi ai elementelor sale este $S_A = (1 + 1 + 1 + 2 + 19 + 29)(1 + 37) = 2014$.

²Evident, măcar divizorii 1 ai fiecărui număr.

b) Soluția oficială observă că $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ este număr impar (pentru 8), apoi că $1 + p + p^2 + p^3 = (1 + p)(1 + p^2)$ este par (pentru p^3 , impar), și în fine că $1 + p + q + pq = (1 + p)(1 + q)$ este par (pentru pq , dat fiind că măcar unul dintre p, q este impar).

Dar atunci (din cauza prezenței numărului 8, singurul posibil cu suma divizorilor săi pozitivi impară) suma S_B va fi impară, deci diferită de 2014 (of, of, nu prea îmi place, ca de obicei, deghizarea unui rezultat general într-o particularitate irelevantă, dar se pare că fenomenul este endemic).

Trebuie să insist, iarăși și iarăși. Divizorii unui număr pot fi și negativi. Toate definițiile din textele de aritmetică menționează atunci când lucrăm doar cu divizorii **pozitivi**; vezi

http://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic_function

Așa încât, chiar dacă la școală sau în clasă acest "amănunt" este (în mod greșit) omis, ar trebui să facem acest (minim) efort, de claritate și precizie. Nu de alta, dar deprinderile bune trebuie căpătate din timp. \square

Subiectul (4). *Determinați numerele naturale a pentru care există exact 2014 numere naturale b care verifică relația $2 \leq \frac{a}{b} \leq 5$.*

Soluție. Relația se scrie $2a \leq 10b \leq 5a$, deci trebuie găsite numerele naturale a pentru care în intervalul $[2a, 5a]$ se află exact 2014 multipli de 10. Prin urmare trebuie să avem $\left\lfloor \frac{5a}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2a-1}{10} \right\rfloor = 2014$. Verifică doar numerele $\boxed{6710, 6712, 6713}$.

Punctajele obținute aici (doi de 7, câte un 6 și 5) sunt puțin de neînțeles; problema nu este atât de grea, decât doar dacă formula de calcul a numărului multiplilor este mai puțin cunoscută. \square

4. CLASA A VII-A

Subiectul (1). *a) Arătați că pentru orice numere reale a și b are loc relația:*

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) + 50 \geq 2(2a + 1)(3b + 1).$$

b) Determinați numerele naturale n și p care verifică relația:

$$(n^2 + 1)(p^2 + 1) + 45 = 2(2n + 1)(3p + 1).$$

Soluție. **Un exercițiu în factorizare și/sau grupare de termeni.** a) Grupăm $(a^2 + 1)(b^2 + 1) + 50 - 2(2a + 1)(3b + 1) = (ab - 6)^2 + (a - 2)^2 + (b - 3)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $a = 2$ și $b = 3$.

b) Folosind punctul a), grupăm

$$(n^2 + 1)(p^2 + 1) + 45 - 2(2n + 1)(3p + 1) = (np - 6)^2 + (n - 2)^2 + (p - 3)^2 - 5,$$

deci cele trei pătrate perfecte trebuind a fi 0, 1 și 4, o analiză rapidă duce la soluțiile $\boxed{(n, p) \in \{(2, 2), (2, 4)\}}$.

Este înduioșătoare folosirea literelor n, p în loc de mai obișnuitele m, n ; probabil pentru a evita confuziile posibile în scrierea de mână a literelor m, n . Merge ... \square

Subiectul (2). Fie numerele reale a, b, c astfel încât:

$$|a - b| \geq |c|, |b - c| \geq |a|, |c - a| \geq |b|.$$

Arătați că unul dintre numerele a, b, c este suma celorlalte două.

Soluție. Soluția elegantă (prima dintre soluțiile oficiale) este să ridicăm la pătrat relațiile date, iar apoi, factorizând și înmulțind între ele noile relații obținute, să ajungem la

$$((a + b - c)(b + c - a)(c + a - b))^2 \leq 0,$$

de unde (măcar) unul dintre factori trebuie să fie nul. Alternativ, asumând o ordine anume între numerele a, b și c , putem explicita îndeajuns modulii pentru a obține rezultatul dorit (această metodă furnizează chiar mai multe informații, de exemplu faptul că (cel puțin) unul dintre produsele ab, bc, ca este mai mic sau egal cu 0). \square

Subiectul (3). Se consideră triunghiul ABC în care măsura unghiului A este 135° . Perpendiculara în A pe dreapta AB intersectează latura $[BC]$ în punctul D , iar bisectoarea unghiului B intersectează latura $[AC]$ în punctul E . Determinați măsura unghiului $\angle BED$.

G.M.-B.

Soluție. Avem relația $\angle AEB + \angle ABE = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, și de asemenea $\angle ABD + \angle ADB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Deoarece $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABD$, rezultă $\angle AEB = \frac{1}{2}\angle ADB$. Notând cu I centrul cercului înscris în $\triangle ABD$, rezultă că $\angle AEI = \angle ADI$, deci patrulaterul $AEDI$ este inscriptibil, prin urmare $\angle IED = \angle IAD = \boxed{45^\circ}$.

Soluția oficială conține o mică eroare, care trebuie semnalată. Ea ajunge la $\triangle ABI \sim \triangle DBE$, dar corect este $\triangle ABI \sim \triangle EBD$; convenția de scriere a asemănării a două triunghiuri obligă ordinea vârfurilor în corespondența de asemănare. \square

5. CLASA A VIII-A

Subiectul (2). Pentru fiecare număr natural nenul n se notează cu $p(n)$ cel mai mare pătrat perfect cel mult egal cu n .

a) Determinați numărul perechilor de numere naturale nenule (m, n) , cu $m \leq n$, pentru care

$$p(2m + 1) \cdot p(2n + 1) = 400.$$

b) Determinați mulțimea $\left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 100 \text{ și } \frac{p(n+1)}{p(n)} \notin \mathbb{N} \right\}$.

Soluție. Cu alte cuvinte $p(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$. a) Având $400 = 2^4 \cdot 5^2$, rezultă că $\lfloor \sqrt{2m+1} \rfloor \in \{1, 2, 4\}$, și corespunzător $\lfloor \sqrt{2n+1} \rfloor \in \{20, 10, 5\}$. Numărul m aparține deci mulțimilor $\{1\}, \{2, 3\}, \{8, 9, 10, 11\}$, respectiv n aparține mulțimilor $\{200, 201, \dots, 219\}, \{50, 51, \dots, 59\}, \{12, 13, 14, 15, 16, 17\}$, și deci numărul perechilor (m, n) este $1 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 6 = \boxed{64}$.

Soluția oficială este complet dată peste cap, calculând – **cu greșeli** – pentru $p(2m-1)p(2n-1) = 400$, și ajungând la rezultatul eronat [84](#). Mă întreb cum s-a făcut corectura?

b) Avem $p(n) \neq p(n+1)$ dacă și numai dacă $1 < n+1 = m^2$ este pătrat perfect, și atunci $\frac{p(n+1)}{p(n)} = \frac{m^2}{(m-1)^2} \notin \mathbb{N}$, mai puțin când $m = 2$, adică $n = 3$. Prin urmare mulțimea cerută este cea a numerelor cu 1 mai puțin decât un pătrat perfect între 9 și 100, adică $\boxed{\{8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99\}}$.

Și aici soluția oficială prezintă o (benignă) eroare, făcând confuzia de notație între $p(n+1)$ și $\sqrt{p(n+1)}$. \square

Subiectul (4). Fie $n \geq 2$ un număr natural.

Determinați mulțimea valorilor pe care le poate lua suma

$$S = \lfloor x_2 - x_1 \rfloor + \lfloor x_3 - x_2 \rfloor + \dots + \lfloor x_n - x_{n-1} \rfloor,$$

unde x_1, x_2, \dots, x_n sunt numere reale cu partea întreagă $1, 2, \dots, n$.

S-a notat prin $\lfloor x \rfloor$ partea întreagă a numărului real x .

Soluție. Deoarece $x_k = k + \{x_k\}$ pentru orice $1 \leq k \leq n$, avem

$$\lfloor x_k - x_{k-1} \rfloor = \lfloor 1 + \{x_k\} - \{x_{k-1}\} \rfloor \in \{0, 1\} \text{ pentru } 2 \leq k \leq n,$$

după cum $\{x_k\} < \{x_{k-1}\}$ sau $\{x_k\} \geq \{x_{k-1}\}$. Prin urmare, considerând secvența $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}$, valoarea sumei S este exact numărul acelor indici $2 \leq k \leq n$ pentru care $\{x_k\} \geq \{x_{k-1}\}$. Este atunci elementar faptul că mulțimea valorilor pe care le poate lua suma S este $\boxed{\{0, 1, \dots, n-1\}}$.

În acest context, modelele din soluția oficială devin chiar inutile, căci este evident că putem considera o astfel de secvență, cu valori din $[0, 1)$, având orice număr (de la 0 la $n-1$) dorit de astfel de inegalități.

Deși problema pare grea prin enunțul ei oarecum complicat, fenomenul subteran este aproape trivial; dovada stă în chiar punctajele mari obținute de peste jumătate dintre concurenți. \square

6. ÎNCHEIERE

Problemele de gimnaziu încep să mă intereseze mai mult (decât cele de liceu), fiind mai puțin supuse unor stricte cerințe "tehnice", deci permițând mai multă libertate și originalitate (care din păcate nu sunt chiar în proporția ideală; rețeta "gustării" este cam fadă). Cu excepția unor scăpări jenante, un concurs curățel, deși cam anost.