Clasa a XI-a, Gazeta Matematica nr. 3

27819. Şirurile $(x_n)_{n\geqslant 1}$ şi $(y_n)_{n\geqslant 1}$, cu $x_1, y_1 > 0$, sunt definite prin relaţiile de recurenţă:

$$x_{n+1} = x_n - x_n^p,\ n \geqslant 1, \qquad y_{n+1} = \frac{1}{y_1^p} + \frac{1}{y_2^p} + \ldots + \frac{1}{y_n^p},\ n \geqslant 1,$$

unde $p \geqslant 2$ este un număr natural fixat. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n^{p-1} \cdot y_n^{p+1}\right)$.

Marian Ursărescu, Roman

27820. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$ pentru care există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $A^2 - B^2 = \lambda I_{2n+1}$. Demonstraţi că $\det(AB - BA) = 0$.

Mihai Opincariu, Brad, Hunedoara

27821. a) Arătaţi că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, ecuaţia $x^x = e^n$ are o unică soluţie, pe care o notăm x_n.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(n - x_n)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^a}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

c) Arătaţi că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 3$, există $N_k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt[k]{n^{k-1}} < x_n < n$, oricare ar fi $n \geqslant N_k$.

Mihai Dicu, Craiova

S:L20.102. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi strict descrescătoare. Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir definit de $a_0 = f(x)$, $a_1 = x$, $a_{n+1} = f^{-1}(a_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x + f^{-1}(x) = 2f^{-1}(f^{-1}(x))$, atunci determinaţi legea $f(x)$ care defineşte funcţia f şi termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 0}$.

Gabriel Tica, Băileşti şi *Neculai Stanciu*, Buzău

S:L20.103. Să se determine funcţiile $f : [0,3] \longrightarrow (0,1]$ care verifică condiţiile:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x^2}$ există şi este finită;

ii) $f(3x) + 3f(x) = 4f^3(x)$, oricare $x \in [0,1]$.

Cătălin Spiridon, Craiova

S:L20.104. Fie matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $2A^3 = A + 2I_n$, unde $n \geq 3$. Să se arate că $\det A > 0$.

Cristina Spiridon, Craiova

S:L20.105. Studiaţi convergenţa şirului de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $x_1 = \dfrac{1}{10}$ şi $x_{n+1} = 2x_n - 5x_n^2$.

Răzvan Drăghici, student, Germania

S:L20.107. Fie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, f continuă. Determinaţi funcţia f ştiind că $f(x) = f\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}\right)$, pentru orice $x \in [0,1]$.

Felician Preda, Craiova