Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$2^x + 3^y = z^2.$$

Olimpiadă Marea Britanie, 1996

Soluţie.

• Dacă $x = 0$, ecuaţia revine la $3^y = (z-1)(z+1)$. Deoarece $z-1$ şi $z+1$ nu pot fi ambele divizibile cu 3, rezultă că $z-1 = 1$, adică $z = 2$. Se obţine soluţia $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

• Dacă $x = 1$, ecuaţia devine $2 + 3^y = z^2$. Dacă $y = 0$, atunci $z^2 = 3$, imposibil. Dacă $y > 0$, $z^2 = 3^y + 2 = M3 + 2$, dar un pătrat perfect nu este de forma $M3 + 2$.

• Dacă $x \geq 2$, atunci $2^x = M4$, iar 3^y este impar, deci z este impar. Atunci $z^2 = M4+1$. Rezultă că şi $3^y = M4+1$. Dar $3^y = (4-1)^y \equiv (-1)^y \pmod 4$, de unde y este par. Fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $y = 2k$. Atunci $2^x = z^2 - (3^k)^2 = (z-3^k)(z+3^k)$. Deducem că $z-3^k = 2^u$ şi $z+3^k = 2^v$, cu $u, v \in \mathbb{N}$, $u+v = x$. Atunci $2^v - 2^u = 2 \cdot 3^k$. De aici rezultă că membrul stâng este par, dar nu este divizibil cu 4, deci $u = 1$. Obţinem atunci că $3^k = 2^{v-1} - 1$. Dacă $k = 0$, atunci $v = 2$ şi obţinem soluţia $x = 3$, $y = 0$, $z = 3$. Dacă $k > 0$, atunci $3^k = M3$, deci trebuie ca $2^{v-1} = M3 + 1$. Cum $2^{v-1} = (3-1)^{v-1} \equiv (-1)^{v-1} \pmod 3$, rezultă că $v-1$ este par. Fie $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $v - 1 = 2m$. Atunci $3^k = (2^m - 1)(2^m + 1)$. Deoarece $2^m - 1$ şi $2^m + 1$ nu pot fi simultan multipli de 3, rezultă că $2^m - 1 = 1$, deci $m = 1$. Se obţine soluţia $x = 4$, $y = 2$, $z = 5$.

În concluzie, ecuaţia are trei soluţii: $(x, y, z) = (0, 1, 2)$, $(x, y, z) = (3, 0, 3)$ şi $(x, y, z) = (4, 2, 5)$.