

### Etapa 4, Problema 1

Determinați numerele reale strict pozitive  $x$  și  $y$  cu proprietatea că

$$4^{x+y} = (2^{x+2} - 4)(2^{y+2} - 4).$$

\*\*\*

#### Soluție.

Notând  $2^x = a$ ,  $2^y = b$ , unde  $a, b \in (1, \infty)$ , egalitatea din enunț se scrie sub forma  $a^2b^2 = (4a - 4)(4b - 4)$ .

Însă  $4a - 4 \leq a^2$  și  $4b - 4 \leq b^2$ , egalitățile fiind atinse dacă și numai dacă  $a = b = 2$ . Avem voie să înmulțim membru cu membru cele două inegalități și relația precedentă ne spune că au loc situațiile de egalitate.

Revenind la notațiile facute, obținem că singura soluție a ecuației din enunț este  $x = y = 1$ .