

Conice - Câteva proprietăți elementare

lect.dr. Mihai Chiș

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea de Vest din Timișoara

Viitori Olimpici ediția a 9-a, etapa I, clasa a XII-a

1 Definiții și ecuații canonice

1.1 Elipsa

Definiție 1.1. Fie $F_1, F_2 \in \Pi$ două puncte oarecare fixate în plan, iar $d \in (0, \infty)$ un număr pozitiv cu proprietatea că $d > F_1F_2$. *Elipsa* de focare F_1 și F_2 și axă mare d este locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanțelor până la focarele F_1 și F_2 este egală cu d :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(F_1, F_2, d) = \{M \in \Pi \mid MF_1 + MF_2 = d\}.$$

Observație 1.2. Cercul $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ de centru O și rază r este un caz particular de elipsă pentru care $F_1 = F_2 = O$ și $d = 2r$.

Observație 1.3. Considerând un reper ortogonal cu originea O în mijlocul segmentului $[F_1F_2]$, cu axa $Ox = F_1F_2$, notând $|F_1F_2| = 2c$ și $d = 2a$, coordonatele focarelor vor fi $F_1(c, 0)$ și $F_2(-c, 0)$. Atunci

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{E} &\iff MF_1 + MF_2 = 2a \iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \iff \\ &\iff x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 2a^2 \implies (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \iff \\ &\iff b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1) \end{aligned}$$

unde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Reciproc, dacă coordonatele punctului M verifică ecuația (1), atunci

$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2} = \left| a - \frac{c}{a}x \right|,$$

și analog

$$MF_2 = \left| a + \frac{c}{a}x \right|.$$

Dacă (x, y) verifică (1), atunci $x^2 \leq a^2$, astfel că $|\frac{c}{a}x| \leq a$ și

$$MF_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad MF_2 = a + \frac{c}{a}x.$$

Rezultă că $MF_1 + MF_2 = 2a = d$, și $M \in \mathcal{E}$.

Prin urmare,

$$M(x, y) \in \mathcal{E} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecuția (1) se numește ecuația canonică a elipsei.

1.2 Hiperbola

Definiție 1.4. Fie $F_1, F_2 \in \Pi$ două puncte oarecare fixate în plan, iar $d \in (0, \infty)$ un număr pozitiv cu proprietatea că $d < F_1F_2$. *Hiperbola* de focare F_1 și F_2 și axă mare d este locul geometric al punctelor din plan pentru care valoarea absolută a diferenței distanțelor până la focarele F_1 și F_2 este egală cu d :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(F_1, F_2, d) = \{M \in \Pi \mid |MF_1 - MF_2| = d\}.$$

Observație 1.5. Considerând un reper ortogonal cu originea O în mijlocul segmentului $[F_1F_2]$, cu axa $Ox = F_1F_2$, notând $|F_1F_2| = 2c$ și $d = 2a$, avem că

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{H} &\iff |MF_1 - MF_2| = 2a \iff |\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a \iff \\ &\iff x^2 + y^2 + c^2 - \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 2a^2 \implies (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \iff \\ &\iff b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2) \end{aligned}$$

unde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Reciproc, dacă coordonatele punctului M verifică ecuația (2), atunci

$$MF_1 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| \quad \text{și} \quad MF_2 = \left| a + \frac{c}{a}x \right|.$$

Dacă (x, y) verifică (2), atunci $x^2 \geq a^2$, și $|\frac{c}{a}x| \geq a$. Dacă $x \geq a$, atunci

$$MF_1 = \frac{c}{a}x - a, \quad MF_2 = \frac{c}{a}x + a, \quad \text{și} \quad MF_1 - MF_2 = -2a \implies M \in \mathcal{H}.$$

Dacă $x \leq -a$, atunci

$$MF_1 = -\frac{c}{a}x + a, \quad MF_2 = -\frac{c}{a}x - a, \quad \text{și} \quad MF_1 - MF_2 = 2a \implies M \in \mathcal{H}.$$

Prin urmare,

$$M(x, y) \in \mathcal{H} \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecuția (2) se numește ecuația canonică a hiperbolei.

1.3 Parabola

Definiție 1.6. Fie $F \in \Pi$ un punct, iar $\delta \subseteq \Pi$ o dreaptă în plan. *Parabola* de focar F și dreaptă directoare δ este locul geometric al punctelor egal depărtate de focarul F și dreapta directoare δ :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(F, \delta) = \{M \in \Pi \mid MF = \text{dist}(M, \delta)\}.$$

Observație 1.7. Considerăm un reper ortogonal cu originea O în mijlocul segmentului $[FP]$, unde $P = pr_{\delta}(F)$ este proiecția focarului F pe directoarea δ , cu axa $Ox = FP$ (și deci $Oy \parallel \delta$). Dacă $p = \text{dist}(F, \delta)$, atunci focarul F are coordonatele $F(\frac{p}{2}, 0)$, iar directoarea δ are ecuația $x = -\frac{p}{2}$. Avem atunci:

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{P} &\iff MF = \text{dist}(M, \delta) \iff \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \iff \\ &\iff \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \iff y^2 = 2px. \quad (3) \end{aligned}$$

1.4 Excentricitate

Propoziție 1.8. Fie $F \in \Pi$ un punct, $\delta \subseteq \Pi$ o dreaptă în plan, iar $e \in (0, 1)$. Atunci locul geometric \mathcal{L} al punctelor M din plan cu proprietatea că $MF = e \cdot \text{dist}(M, \delta)$ este o elipsă având un focar în F și pentru care raportul dintre distanța focală și axa mare este egal cu e .

Demonstrație. Considerăm un reper ortogonal xOy în care δ coincide cu axa Oy și are ecuația $x = 0$, iar F are coordonatele $(p, 0)$, unde $p = \text{dist}(F, \delta)$. Atunci

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{L} &\iff MF = e \cdot \text{dist}(M, \delta) \iff \sqrt{(x - p)^2 + y^2} = e \cdot |x| \iff \\ &\iff (1 - e^2)x^2 - 2px + p^2 + y^2 = 0 \iff \left(x - \frac{p}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2} \quad (*). \end{aligned}$$

Considerând un nou reper ortogonal $x'O'y'$ cu $O'(\frac{p}{1 - e^2}, 0)$, în raport cu care coordonatele sunt $x' = x - \frac{p}{1 - e^2}$, $y' = y$, notând $a = \frac{pe}{1 - e^2}$ și $b = \frac{pe}{\sqrt{1 - e^2}}$, atunci

$$(*) \iff \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Prin urmare, \mathcal{L} este o elipsă cu centrul în O' , semiaxă mare $a = \frac{pe}{1 - e^2}$, semiaxă mică $b = \frac{pe}{\sqrt{1 - e^2}}$ și semidistanță focală $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{pe^2}{1 - e^2}$. Deoarece $F'O' = |p - \frac{p}{1 - e^2}| = \frac{pe^2}{1 - e^2} = c$, punctul F este unul dintre focare, al doilea fiind simetricul lui F față de centrul elipsei O' . În plus, avem că

$$\frac{c}{a} = \frac{pe^2}{1 - e^2} \cdot \frac{1 - e^2}{pe} = e.$$

□

Observație 1.9. Numărul $e = \frac{c}{a}$ se numește *excentricitatea elipsei*. Deoarece cercul este un caz particular de elipsă, de semidistanță focală $c = 0$, cercul poate fi considerat o elipsă de excentricitate nulă.

Propoziție 1.10. Fie $F \in \Pi$ un punct, $\delta \subseteq \Pi$ o dreaptă în plan, iar $e \in (1, \infty)$. Atunci locul geometric \mathcal{L} al punctelor M din plan cu proprietatea că $MF = e \cdot \text{dist}(M, \delta)$ este o hiperbolă având un focar în F și pentru care raportul dintre distanța focală și axa mare este egal cu e .

Demonstrație. La fel ca în cazul elipsei, considerăm un reper ortogonal xOy în care δ coincide cu axa Oy și are ecuația $x = 0$, iar F are coordonatele $(p, 0)$, unde $p = \text{dist}(F, \delta)$. Atunci

$$M \in \mathcal{L} \iff MF = e \cdot \text{dist}(M, \delta) \iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e \cdot |x| \iff$$

$$\iff (1-e^2)x^2 - 2px + p^2 + y^2 = 0 \iff \left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} \quad (**).$$

Procedăm în continuare ca în cazul elipsei și considerăm reperul ortogonal $x'O'y'$ cu $O' \left(\frac{p}{1-e^2}, 0\right)$, în raport cu care coordonatele sunt $x' = x - \frac{p}{1-e^2}$, $y' = y$. Notăm $a = \frac{pe}{e^2-1}$, $b = \frac{pe}{\sqrt{e^2-1}}$ și $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{pe^2}{e^2-1}$. Atunci

$$(**) \iff \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

astfel că \mathcal{L} este o hiperbolă cu centrul în O' , semiaxa mare $a = \frac{pe}{e^2-1}$ și semidistanța focală $c = \frac{pe^2}{e^2-1}$. Deoarece $FO' = c$, rezultă că unul dintre focarele hiperbolei este punctul F . De asemenea, are loc egalitatea $\frac{c}{a} = e$. La fel ca în cazul elipsei, e se numește *excentricitatea* conicei. \square

2 Ecuația generală a unei conice. Polara unui punct în raport cu o conică. Pol al unei drepte în raport cu o conică

Fără demonstrație dăm următoarea propoziție:

Propoziție 2.1. Fie xOy un reper ortogonal fixat, iar $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$, astfel încât

matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ este nenulă, iar matricea $D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$ este inversabilă.

Locul geometric \mathcal{C} al punctelor din plan ale căror coordonate verifică ecuația

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

este atunci o conică :

- o elipsă dacă $\delta = \det(A) > 0$,
- o hiperbolă dacă $\delta < 0$,
- o parabolă dacă $\delta = 0$.

În continuare vom considera că o conică \mathcal{C} este dată de ecuația

$$(\mathcal{C}) : \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \quad (C)$$

Observație 2.2. O dreaptă oarecare din plan poate avea cel mult două puncte de intersecție cu conica \mathcal{C} . Dacă dreapta d are ecuația $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, acestea se determină rezolvând sistemul de ecuații

$$d \cap \mathcal{C} : \quad \begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases}$$

Când soluțiile sistemului de mai sus nu sunt perechi de numere reale vom spune că dreapta și conica au puncte de intersecție imaginare. Astfel, orice dreaptă intersectează o conică în două puncte (reale sau imaginare, care eventual pot coincide).

Definiție 2.3. Fie $M(x_0, y_0) \in \Pi$ un punct oarecare din plan. Dreapta p_M de ecuație

$$(p_M) : \quad (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2)y + b_1x_0 + b_2y_0 + c = 0$$

se numește *polara punctului M* în raport cu conica \mathcal{C} .

Observație 2.4. Deoarece $\det(D) \neq 0$, pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (cu $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$) există un unic punct $M(x_0, y_0) \in \Pi$ cu proprietatea că

$$\frac{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1}{\alpha} = \frac{a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2}{\beta} = \frac{b_1x_0 + b_2y_0 + c}{\gamma}.$$

Atunci dreapta d de ecuație $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ este exact polara p_M a punctului M , iar M se numește *polul dreptei d* în raport cu conica \mathcal{C} .

Propoziție 2.5. Dacă d este o dreaptă oarecare care trece printr-un punct M , $N \in d \cap p_M$, iar $d \cap \mathcal{C} = \{P, Q\}$, atunci M și N sunt conjugate armonice față de P și Q .

Demonstrație. Dacă M_x, N_x, P_x, Q_x sunt proiecțiile punctelor M, N, P, Q pe axa Ox , atunci

$$(M, N|P, Q) = -1 \iff (M_x, N_x|P_x, Q_x) = -1 \iff$$

$$\iff (x_M - x_P)(x_N - x_Q) + (x_M - x_Q)(x_N - x_P) = 0 \iff 2(x_M x_N + x_P x_Q) = (x_M + x_N)(x_P + x_Q). \quad (\nabla)$$

Pentru o dreaptă oarecare d care trece prin punctul M vom determina în funcție de panta sa m abscisa punctului N , precum și valorile sumei $x_P + x_Q$ și produsului $x_P x_Q$. Notând

$$\alpha = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1, \quad \beta = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2, \quad \gamma = b_1x_0 + b_2y_0 + c,$$

ecuația polarei p_M devine $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, iar abscisa punctului N este

$$x_N = \frac{m\beta x_0 - \beta y_0 - \gamma}{\alpha + m\beta}.$$

Coordonatele punctelor P și Q sunt date de sistemul de ecuații

$$d \cap \mathcal{C} : \quad \begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$$

Făcând substituția $y = m(x - x_0) + y_0$ în ecuația conicei, abscisele x_P și x_Q sunt atunci soluțiile ecuației

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}x(m(x - x_0) + y_0) + a_{22}(m(x - x_0) + y_0)^2 + 2b_1x + 2b_2(m(x - x_0) + y_0) + c = 0 \iff$$

$$\iff (a_{11} + 2ma_{12} + m^2a_{22})x^2 + 2(-ma_{12}x_0 + ma_{22}(y_0 - mx_0) + b_1 + mb_2)x +$$

$$+ a_{22}(y_0 - mx_0)^2 + 2mb_2(y_0 - mx_0) + c = 0.$$

Din relațiile lui Viète rezultă atunci că

$$x_P + x_Q = -2 \cdot \frac{-ma_{12}x_0 + ma_{22}(y_0 - mx_0) + b_1 + mb_2}{a_{11} + 2ma_{12} + m^2a_{22}},$$

respectiv

$$x_P x_Q = \frac{a_{22}(y_0 - mx_0)^2 + 2mb_2(y_0 - mx_0) + c}{a_{11} + 2ma_{12} + m^2a_{22}}.$$

Egalitatea (∇) se verifică atunci ușor. □

Rezultatul din propoziția de mai sus justifică următoarea definiție:

Definiție 2.6. Fie $M, N \in \Pi$ două puncte în plan. Spunem că N este conjugat cu M în raport cu conica \mathcal{C} dacă $N \in p_M$.

Observație 2.7. Relația de conjugare definită mai sus este simetrică:

$$N \in p_M \iff (a_{11}x_M + a_{12}y_M + b_1)x_N + (a_{12}x_M + a_{22}y_M + b_2)y_N + b_1x_M + b_2y_M + c = 0$$

$$\iff a_{11}x_M x_N + a_{12}(x_M y_N + y_M x_N) + a_{22}y_M y_N + b_1(x_M + x_N) + b_2(y_M + y_N) + c = 0$$

$$\iff M \in p_N.$$

Observație 2.8. Cu notațiile din propoziția de mai sus, dacă $P = Q$ (i.e., d este tangentă la conica \mathcal{C}), atunci $N = P = Q$, astfel că $d \cap p_M = d \cap \mathcal{C}$. Acest lucru este răămâne atunci valabil pentru orice punct $M \in d$. Cum $M \in p_N \iff N \in p_M$, deducem că pentru un punct $N \in \mathcal{C}$ polara p_N este exact tangenta în N la conica \mathcal{C} .

Observație 2.9. Din simetria relației de conjugare în raport cu conica \mathcal{C} deducem și că pentru trei puncte $M, N, P \in \Pi$ are loc echivalența

$$P \in p_M \cap p_N \iff M, N \in p_P \iff MN = p_P.$$

Observație 2.10. Pentru $M, N, P \in \Pi$ sunt atunci echivalente afirmațiile

$$M, N, P - \text{coliniare} \iff p_M, p_N, p_P - \text{concurrente}.$$

Observație 2.11. Dacă pentru o dreaptă $d \subseteq \Pi$ notăm cu P_d polul dreptei d în raport cu conica \mathcal{C} , atunci pentru trei drepte $a, b, c \subseteq \Pi$ avem echivalența

$$a, b, c - \text{concurrente} \iff P_a, P_b, P_c - \text{coliniare}.$$