Problema 2. Arătaţi că pentru orice $a, b \geq 0$ are loc inegalitatea

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}.$$

Olimpiadă Cehia şi Slovacia, 2014

Soluţie:
Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, forma Titu Andreescu (sau Bergström), avem

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2}{a\sqrt{b^2+1}} + \frac{b^2}{b\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{(a+b)^2}{a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}},$$

deci este suficient să demonstrăm că $\dfrac{(a+b)^2}{a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}} \geq \dfrac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$.

Ultima inegalitate este echivalentă cu $(a+b)\sqrt{ab+1} \geq a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}$. Prin ridicare la pătrat şi reducerea termenilor asemenea, inegalitatea precedentă revine la $a^3b+b^3a+2ab \geq 2ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$, deci la $a^2+b^2+2 \geq 2\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$ care este tocmai inegalitatea mediilor scrisă pentru numerele a^2+1 şi b^2+1. Egalitatea are loc dacă $a = b$.