

Clasa a X-a - Etapa I - Problema 4

Enunț. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Pentru numerele reale u, v și w astfel încât $0 \leq u < v < w$, definim punctele $U(u, f(u)), V(v, f(v))$ și $W(w, f(w))$. Demonstrați că

$$UW^2 > UV^2 + VW^2.$$

Soluție. Problema se reduce la a demonstra că $\angle UVW$ este obtuz. Din faptul că a, b, c sunt pozitive rezultă că, pe intervalul $[0, \infty)$, funcția f este strict crescătoare. Ducem prin V paralele la axele de coordonate, care vor împărți planul în patru cadrane. Punctele U și W se vor afla în cadrane opuse, ceea ce ne asigură că unghiul $\sphericalangle UVW$ este obtuz. \square