APLICAȚII ALE PRODUSULUI SCALAR

Voi începe prin a aminti că pentru doi vectori $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, produsul scalar este dat de formula $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

În continuare, ne vom folosi de câteva proprietăți esențiale:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ cu $\vec{u} \neq 0$ și $\vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $\vec{u} = \vec{0}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})\,\vec{w} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{w})$, $(\forall)\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$.

Pentru un ΔABC, cu O centrul cercului circumscris, am avea: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = R^2$ și

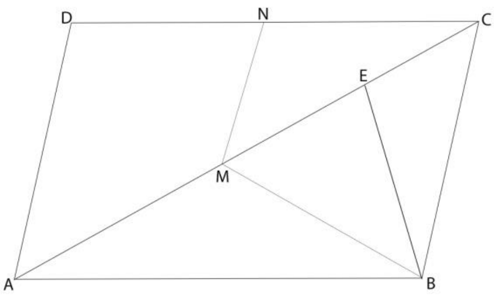
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2 - \frac{C^2}{2}$ cu analoagele.

De asemenea, pentru (∀) M,A,B,C puncte în plan are loc relația:

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (Euler), iar o imediată consecință a acesteia este că în orice triunghi înălțimile sunt concurente.

1. Fie ABCD un paralelogram, BE⊥AC, E∈(AC), M mijlocul lui [AE] și N mijlocul lui [CD]. Arătați că dacă m($\sphericalangle NMB$) = 90°, atunci ABCD este dreptunghi.

(G.M. 2016)



Deoarece m($\sphericalangle NMB$) = 90° => MN⊥MB, deci $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

M și N mijloacele lui [AE] și [CD], deci

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EC})$.

De asemenea $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}) =$

$= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EA})$.

Atunci $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EC}) \cdot \frac{1}{2}(2\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EA}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} \cdot 2 \cdot \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} \cdot 2 \cdot \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{EA}) \xRightarrow[ABCD\ paralelogram]{} = \frac{1}{4}(2 \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EA} + 2\,\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{EA})$.Dar $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = 0$, $(EB \perp EC)$, iar $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} = -BE \cdot BC \cdot \cos\widehat{EBC} = -BE \cdot BC \cdot \frac{BE}{BC} = -BE^2$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = -AD \cdot AE \cdot \cos\widehat{DAE} = -AD \cdot AE \cdot \cos\widehat{ACB} = -AD \cdot AE \cdot \frac{EC}{BC} = -AE \cdot EC$.

Din toate acestea deducem că $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}$ (- 2 · BE^2 + 2 · EA · EC) și știm că $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MB}$ = 0, deci EA·EC = BE^2. Ținând cont că BE⊥AC, E∈(AC), din reciproca teoremei înălțimii avem m($\sphericalangle ABC$) = 90°, deci ABCD este dreptunghi.

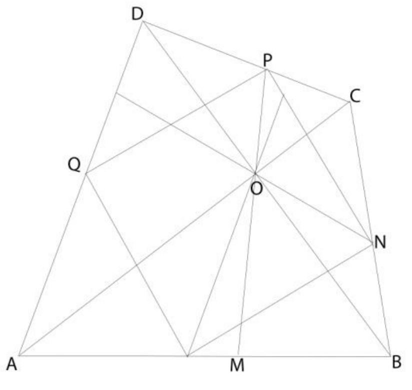
O altă problemă semnificativă care ar putea fi ținută minte ca rezultat este următoarea:

2. (**Teorema triunghiurilor ortologice**) Fie triunghiul ABC și triunghiul $A`B`C`$ astfel încât perpendicularele din A,B,C pe B`C`, C`A` și A`B` să fie concurente. Atunci și perpendicularele din $A`, B`, C`$ pe BC, CA și respectiv AB sunt concurente.

Soluție: Fie O puncul de intersecție al perpendicularelor din A,B,C pe B`C`, C`A` și respectiv A`B` și O` punctul de intersecție al perpendicularelor din $A`$ $și$ $B`$ pe BC și respectiv AC. Vom arăta că O`$C`$ ⊥ AB. Avem $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{B`C`} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{C`A`} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{A`B`} + \overrightarrow{O`A} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{O`B} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{O`C} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{B`O`} + \overrightarrow{O`C`}) + \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{C`O`} + \overrightarrow{O`A`}) + \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{A`O`} + \overrightarrow{O`B`}) + \overrightarrow{O`A`} (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{O`B`} (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{O`C`} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = 0$ (după efectuarea calculelor)
Cum $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{B`C`} = 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{C`A`} = 0$, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{A`B`} = 0$, $\overrightarrow{O`A`} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ și $\overrightarrow{O`B`} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, rezultă că $\overrightarrow{O`C`} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, deci O`$C`$ ⊥ AB, de unde concluzia.

3. Fie ABCD un patrulater convex, ortodiagonal în care {O}=AC∩BD. Notăm cu M,N,P,Q punctele de intersecție a laturilor [AB], [BC], [CD] și [DA] cu perpendicularele duse din O pe laturile patrulaterului ABCD opuse lor. Demonstrați că MNPQ este dreptunghi.

(R.M.T.)



Fie $\frac{MA}{MB}$ = m, $\frac{NB}{NC}$ = n, $\frac{PC}{PD}$ = p, $\frac{QD}{QA}$ = q.

Știm că OM⊥CD, deci $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Deoarece $\frac{MA}{MB}$ = m, deducem că

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+m} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{m}{1+m} \cdot \overrightarrow{OB} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{1+m} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{m}{1+m} \cdot \overrightarrow{OB}\right)(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = 0$$

$$\frac{1}{1+m}(\overrightarrow{OA} + m \cdot \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = 0$$

$$\frac{1}{1+m}(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + m \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} - m \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}) = 0$$

ABCD ortodiagonal => $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$ și $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, deci $\frac{1}{1+m}(m \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) = 0$; $\frac{1}{1+m} \neq 0$

=>m·$\overrightarrow{OB}$·$\overrightarrow{OD}$ = $\overrightarrow{OA}$·$\overrightarrow{OC}$, deci - m·OB·OD = - OA·OC => m·OB·OD = OA·OC => m= $\frac{OA\cdot OC}{OB\cdot OD}$.

Atunci în mod similar n = $\frac{OB\cdot OD}{OA\cdot OC}$; p = $\frac{OA\cdot OC}{OB\cdot OD}$; q = $\frac{OB\cdot OD}{OA\cdot OC}$ => $\frac{MA}{MB}$ = $\frac{NC}{NB}$ = $\frac{PC}{PD}$ = $\frac{QD}{QA}$ = $\frac{OA\cdot OC}{OB\cdot OD}$, deci

MN ∥ AC ∥ PQ și MQ ∥ BD ∥ PN. Ținând cont că AC⊥BD, avem concluzia.

4. Fie O centrul cercului circumscris ΔABC și D mijlocul lui [AB]. Notăm cu E centrul de greutate al triunghiului ACD. Demonstrați că CD⊥OE <=> AB=AC.

(B.M.O. 1985)

Este clar că $\overrightarrow{OE}$ = $\frac{1}{3}$($\overrightarrow{OA}$+$\overrightarrow{OC}$+$\overrightarrow{OD}$) și $\overrightarrow{OD}$ = $\frac{1}{2}$($\overrightarrow{OA}$+$\overrightarrow{OB}$), deci $\overrightarrow{OE}$ = $\frac{1}{3}$($\overrightarrow{OA}$+$\overrightarrow{OC}$+ $\frac{1}{2}$($\overrightarrow{OA}$+$\overrightarrow{OB}$)) = $\frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{3\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\cdot\overrightarrow{OC}}{6}$.

CD⊥OE <=> $\overrightarrow{CD}$·$\overrightarrow{OE}$ = 0<=> ($\overrightarrow{OD}$-$\overrightarrow{OC}$)·$\overrightarrow{OE}$ = 0 <=>($\frac{1}{2}$($\overrightarrow{OA}$+$\overrightarrow{OB}$)- $\overrightarrow{OC}$) $\frac{3\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\cdot\overrightarrow{OC}}{6}$ = 0

<=>$\frac{1}{12}$ ($\overrightarrow{OA}$+$\overrightarrow{OB}$-2· $\overrightarrow{OC}$)($3\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\cdot\overrightarrow{OC}$) = 0

Revenim la $\overrightarrow{OA}$·$\overrightarrow{OA}$ = R^2 și $\overrightarrow{OA}$·$\overrightarrow{OB}$ = R^2- $\frac{c^2}{2}$,

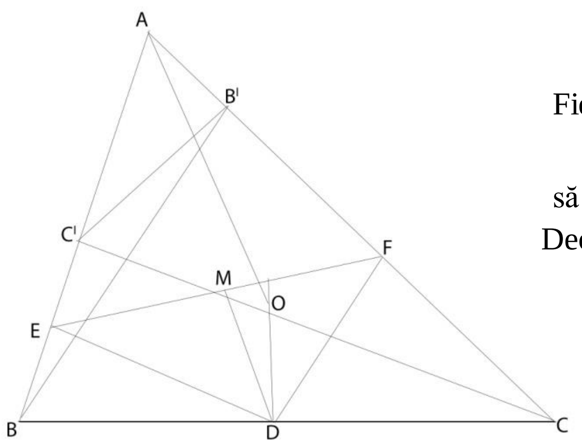
deci $\frac{1}{12}$($3R^2$+R^2- $\frac{c^2}{2}$ +$2R^2$- b^2+$3R^2$- $\frac{3c^2}{2}$ +R^2+$2R^2$- a^2- $6R^2$+$3b^2$- $2R^2$+a^2- $4R^2$) = 0,

$\frac{1}{12}$($2b^2$-$\frac{4c^2}{2}$) = 0 => $2b^2$= $2c^2$, deci b^2= c^2 și cum b,c > 0 <=> b=c.

Astfel CD⊥OE <=> b=c.

5. Fie ΔABC, D mijlocul lui [BC], DE⊥AB; E∈(AB); DF⊥AC; F∈(AC) și M mijlocul lui [EF]. Demonstrați DM ∥ AC.

(Baraj juniori 2018)



Fie BB`⊥AC; B`∈(AC) și CC`⊥AB; C`∈(AB).

Se cunoaște că AO⊥ B`C`, deci ar fi de ajuns să demonstrăm DM⊥ B`C`, adică $\overrightarrow{DM}$·$\overrightarrow{B`C`}$ = 0.

Deoarece M este mijlocul lui [EF] avem $\overrightarrow{DM}$ = $\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{DE}$+$\overrightarrow{DF}$).

Atunci $\overrightarrow{DM}$·$\overrightarrow{B`C`}$ = $\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{DE}$+$\overrightarrow{DF}$) ($\overrightarrow{AC`}$- $\overrightarrow{AB`}$) $\xRightarrow[linie\ mijlocie]{}$ $\frac{1}{4}$ ($\overrightarrow{CC`}$+$\overrightarrow{BB`}$)($\overrightarrow{AC`}$- $\overrightarrow{AB`}$) =

= $\frac{1}{4}$ ($\overrightarrow{CC`}$·$\overrightarrow{AC`}$-$\overrightarrow{CC`}$·$\overrightarrow{AB`}$+$\overrightarrow{BB`}$· $\overrightarrow{AC`}$- $\overrightarrow{BB`}$· $\overrightarrow{AB`}$) = $\frac{1}{4}$ ($\overrightarrow{BB`}$· $\overrightarrow{AC`}$ - $\overrightarrow{CC`}$·$\overrightarrow{AB`}$) =

$= \frac{1}{4}$ (-BB\`·AC\`·cos $\widehat{ABB}$\`+CC\`·AB\`·cos $\widehat{ACC}$\`) $\xrightarrow[BCB`C`\ inscripltibil]{}$

$\frac{1}{4}$ cos $\widehat{ABB}$\`($\overrightarrow{CC`}\cdot\overrightarrow{AB`}$- BB\`·AC\`) (1)

BCB\`C\`inscriptibil => $\sphericalangle ACC` \equiv \sphericalangle ABB`$ => ΔACC\`~ΔABB\`(U.U) =>

$\frac{CC`}{BB`} = \frac{AC`}{AB`}$ => CC\`·AB\`=BB\`·AC\` (2).

Din (1) și (2) => $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{B`C`}$ = 0, deci DM⊥B\`C\`. Cum și AO⊥B\`C\`, avem DM ∥ AC.

Probleme propuse:

1. Fie triunghiul ABC; P∈(BC); $PD_1 \perp AB$; D_1 ∈(AB) și $PD_2 \perp AC$; D_2 ∈(AC). Notăm cu E mijlocul lui $[BD_1]$ și cu F mijlocul lui $[CD_2]$. Demonstrați că dacă Q este simetricul lui P față de A și $QD_1 \perp PF_1$, atunci $QD_2 \perp PF_2$.

(***)

2. Fie triunghiul ABC cu AB$\neq BC \neq CA \neq AB$ și G,I,H centrul de greutate, centrul cercului înscris și respectiv ortocentrul său. Demonstrați că m($\sphericalangle GIH$) > 90°.

(I.M.O. 1990)

3. Fie triunghiul ABC cu G centrul de greutate și I centrul cercului înscris în triunghi. Demonstrați că OG≤OI.

(B.M.O. 1996)

4. Fie ABCD un trapez ortodiagonal cu bazele BC și AD. Notăm cu O intersecția diagonalelor, cu E proiecția lui O pe AD și cu F simetricul lui O față de mijlocul segmentului AD. Perpendiculara din F pe AD intersectează perpendiculara din D pe EB în H. Să se demonstreze că dreptele AH și CE sunt perpendiculare.

(G.M. 2017)

5. Fie triunghiul ABC ascuțiunghic. Notăm cu H ortocentrul său și cu M mijlocul lui [BC]. Fie $Y\epsilon$AC astfel încât $YH \perp MH$ și fie Q∈ BH astfel încât QA⊥AM. Fie J intersecția lui MQ cu cercul de diametru [MY]. Demonstrați că HJ⊥AM.

(E.M.C. j. 2017)

Elev: Vasile Marian Daniel,
clasa a IX-a
Colegiul Național Pedagogic „Ștefan Odobleja" – Dr.Tr.Severin