Clasa a X-a - Etapa 4 - Problema 2

Enunţ. *Determinaţi toate funcţiile* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *care verifică simultan relaţiile* $f(x+y)=f(x)+f(y)$ *şi* $f(xy)=f(x)f(y)$, *pentru orice* $x,y\in\mathbb{R}$.

Soluţie. Vom arăta că singurele soluţii sunt funcţiile $f(x)=x$ şi $f(x)=0$, care evident verifică condiţiile din enunţ.

Pentru început, fie $t>0$. Atunci $f(t)=f\left(\left(\sqrt{t}\right)^2\right)=\left(f\left(\sqrt{t}\right)\right)^2\geq 0$.

Apoi, fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$. Atunci $f(b)=f(a+b-a)=f(a)+f(b-a)\geq f(a)$, deci f este crescătoare. Obţinem că f este o funcţie crescătoare care verifică ecuaţia Cauchy.

Prin urmare există $m\geq 0$ cu $f(x)=mx$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Prin înlocuire în a doua egalitate din enunţ obţinem $m\in\{0,1\}$ şi concluzia se impune. $\square$