Problema 4. Pe un cerc sunt scrise 2014 numere, doi de 1 şi 2012 de 0. Se poate efectua următoarea operaţie: se alege un număr şi i se schimbă cei doi vecini din 0 în 1 şi invers. Făcând astfel de operaţii, putem să obţinem 2014 de 1 pe cerc?

Andrei Eckstein, prelucrare după o problemă dată la Olimpiada Rio Plata, 1997

Soluţie: Răspunsul depinde de poziţia celor două cifre de 1 de pe cerc. Dacă colorăm cele 2014 numere, alternativ, în alb şi negru, răspunsul este că dacă cele două cifre de 1 au aceeaşi culoare atunci nu putem face ca toate numerele de pe cerc să devină 1, în vreme ce în cazul în care cele două cifre de 1 au culori diferite, putem ajunge la configuraţia finală dorită.

Dacă 1-urile au aceeaşi culoare: să observăm că numărul de 1-uri negre este invariant la o operaţie. Orice operaţie vizează fie două numere negre fie două numere albe. Dacă ea vizează numere negre, numărul de 1-uri negre poate să crească cu 2 (dacă se schimbă două 0-uri negre în 1-uri), să scadă cu 2 (dacă se schimbă două 1-uri negre în 0-uri) sau să rămână neschimbat dacă se schimbă un 0 şi un 1 într-un 1 şi respectiv un 0. Dacă iniţial 1-urile au aceeaşi culoare, atunci avem fie zero fie două 1-uri negre, oricum un număr par. Prin urmare numărul de 1-uri negre de pe cerc va fi mereu par. La final, ar trebui să avem numai 1-uri, în particular 1007 1-uri negre, adică un număr impar. Acest lucru nu este posibil, deci nu putem ajunge la respectiva configuraţie.

Dacă 1-urile au culori diferite: să observăm că putem face cei doi de 1 să fie vecini. Într-adevăr, dacă iniţial ei nu sunt vecini, putem alege un 0 vecin cu un 1 şi face operaţia. Efectul este că 1-le se va ,,muta" în poziţia simetrică faţă de 0-ul ales. Repetând această manevră, putem face ca cei doi de 1 să devină vecini. Celelalte 2012 numere le grupăm acum câte 4. În fiecare din cele 503 grupe, alegem, pe rând, cele două cifre din mijloc şi facem operaţia. Cele două operaţii vor transforma grupa de patru 0-uri în patru de 1. Procedând astfel pentru fiecare grupă, vom transforma toate numerele de pe cerc în 1-uri.

Remarcă: Enunţul problemei originale date la Olimpiada Rio Plata:

Pe un cerc sunt scrise 1996 de 0 şi un 1. Singura operaţie permisă e să alegem un număr şi să-i schimbăm vecinii din 0 în 1 şi invers. Făcând astfel de operaţii, putem preschimba toate numerele de pe cerc în 1-uri? Dar dacă am fi pornit cu 1997 de 0 pe cerc?

Soluţie: Răspunsul este că dacă pornim cu 1996 de zerouri, putem ajunge să avem numai 1-uri, în vreme ce dacă pornim cu 1997 zerouri, nu putem.
Cu 1996 zerouri, le putem grupa în 499 grupe de câte 4, apoi facem operaţia alegând al doilea şi al treilea 0 din fiecare grup.
Cu 1997 zerouri, să observăm că numărul de cifre de 0 existente pe cerc nu-şi schimbă paritatea. Iniţial avem un număr impar de zerouri, 1997, deci nu putem ajunge la configuraţia în care să avem 0 zerouri (adică un număr par).