P2. Fie $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ oarecare, iar $(x_n)_{n\geq 2}$ un şir definit prin $x_n = (log_n(n+\alpha))^{\frac{n}{log_n(\alpha)}}$, $(\forall)n \geq 2$. Arătaţi că şirul $(x_n)_{\geq 2}$ este convergent şi aflaţi limita sa.

S. Termenii şirului $(x_n)_{n\geq 2}$ se pot scrie sub forma

$$x_n = \left(\left(1 + \frac{ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}{ln(n)}\right)^{\frac{ln(n)}{ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}}\right)^{\frac{ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}{ln(n)}\cdot\frac{n\cdot ln(n)}{ln(\alpha)}}$$

Cum

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1 + \frac{ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}{ln(n)}\right)^{\frac{ln(n)}{ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}} = e \quad , \text{ iar } \quad \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}{ln(n)}\cdot\frac{n\cdot ln(n)}{ln(\alpha)} = \frac{\alpha}{ln(\alpha)},$$

rezultă că x_n este convergent, cu $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = e^{\frac{\alpha}{ln(\alpha)}}$.