Determinaţi numerele întregi n pentru care există numere prime p şi q astfel încât

$$p(p+1)-q(q+2)=n(n+3).$$

Adriana şi Lucian Dragomir

Soluţie:

Deoarece $p(p+1)$ şi $n(n+3)$ sunt numere pare, rezultă că şi $q(q+2)$ este par, deci q este par. Fiind şi prim, rezultă $q=2$. Ajungem astfel la $p(p+1)-8=n(n+3)$. Înmulţim această ecuaţie cu 4 şi o scriem $(4p^2+4p+1)-1-32=(4n^2+12n+9)-9$, adică $(2p+1)^2-(2n+3)^2=24$. Obţinem că $(2p+1+2n+3)(2p+1-2n-3)=24$, sau $(p+n+2)(p-n-1)=6$. Cei doi factori trebuie să aibă acelaşi semn şi suma $2p+1>0$, deci ei trebuie să fie pozitivi. Avem patru variante:

I. $p+n+2=1$, $p-n-1=6$ care conduce la $p=3$ (prim) şi $n=-4$;

II. $p+n+2=6$, $p-n-1=1$ care conduce la $p=3$ (prim) şi $n=1$;

III. $p+n+2=2$, $p-n-1=3$ care conduce la $p=2$ (prim) şi $n=-2$;

IV. $p+n+2=3$, $p-n-1=2$ care conduce la $p=2$ (prim) şi $n=-1$.

Aşadar numerele căutate sunt $n=-4$, $n=-2$, $n=-1$ şi $n=1$.