Clasa a X-a

Problema 2. Demonstrați că numărul $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2^{3k}$ nu este divizibil cu 5 pentru niciun $n \in \mathbb{N}$.

Soluție și barem:

Este suficient să demonstrăm că: $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cdot (-2)^{k}$ nu e divizibil cu 5 pentru niciun $n \in \mathbb{N}$. . . . . **1p**.

Fie numărul complex $(1+i\sqrt{2})^{2n+1} = R_n + i\sqrt{2}S_n$, cu $R_n, S_n \in \mathbb{R}$ (1) . . . . **2p**.

Trecând la module în (1) obținem $3^{2n+1} = R_n^2 + 2S_n^2$ . . . . **2p**.

Deoarece $3^{2n+1} \equiv 2, 3 (mod\ 5)$, iar $R_n^2 \equiv 0, 1, 4 (mod\ 5)$(ca pătrat al unui număr întreg), rezultă că $S_n^2 \equiv 3(3^{2n+1} - R_n^2) \not\equiv 0 (mod\ 5)$ şi deci $S_n \not\equiv 0 (mod\ 5)$ . . . . . **2p**.