Problema 1. Fie n un număr natural astfel încât $3^n+3^{n+1}+\ldots+3^{2n}$ să fie pătrat perfect. Demonstraţi că n este multiplu de 4.

Olimpiadă Estonia

Soluţie:
Deoarece exponentul lui 3 în descompunerea în factori primi a unui pătrat perfect trebuie să fie un număr par, iar $3^n+3^{n+1}+\ldots+3^{2n}=3^n(1+3+\ldots+3^n)$ este divizibil cu 3^n dar nu şi cu 3^{n+1}, deducem că n trebuie să fie par. Fie $n=2m$, $m\in\mathbb{N}$. Atunci condiţia din enunţ revine la $1+3+\ldots+3^{2m}$ - pătrat perfect.
Dar $1+3+3^2+\ldots+3^{2m}=1+3(1+3)+3^3(1+3)+\ldots+3^{2m-1}(1+3)=1+12(1+9+9^2+\ldots+9^{m-1})$.
Dacă m este impar, atunci în paranteză avem o sumă constând dintr-un număr impar de termeni impari, deci suma este impară. Atunci $1+3+3^2+\ldots+3^{2m}=1+12(M_2+1)=M_8+5$. Ori se ştie că un pătrat perfect nu poate da restul 5 la împărţirea cu 8 (pătratul unui număr impar, $2k+1$, este $(2k+1)^2=4k(k+1)+1=M_8+1$ deoarece $k(k+1)$ este mereu număr par), prin urmare, dacă m este impar, $1+3+3^2+\ldots+3^{2m}$ nu este pătrat perfect.
Deducem că m trebuie să fie par, adică $n=2m$ trebuie să fie multiplu de 4.

Altă finalizare: Putem demonstra că $1+3+3^2+\ldots+3^{2m}$ nu este pătrat perfect dacă m este impar şi făcând o analiză modulo 5, sau cu ultima cifră: deoarece $1+3+3^2+3^3=40$ are ultima cifră 0, grupând termenii câte 4, avem că suma termenilor în fiecare grup complet are ultima cifră 0. Dacă $m=2j+1$ este impar, suma are $2m+1=4j+3$ termeni, deci vom avea j grupe complete cu câte 4 termeni şi încă un grup incomplet, de trei termeni, de exemplu la început: $1+3+3^2=13$ are ultima cifră 3, deci $1+3+3^2+\ldots+3^{2m}$ are ultima cifră 3 dacă m este impar. Se ştie că un număr care are ultima cifră 3 nu poate fi pătrat perfect, de unde concluzia.