Etapa 6, Problema 4

Se pot alege pe un cerc de rază 1 un număr de 2013 puncte distincte, astfel încât distanţa între oricare două dintre aceste puncte să fie număr raţional?

A 17-a Olimpiadă Internaţională de Matematică, Bulgaria, 1975

Soluţie.
Gândim cercul de rază 1 ca fiind un cerc trigonometric. Fie $A(\cos 2a, \sin 2a)$ şi $B(\cos 2b, \sin 2b)$, cu $0 \leq a < b < \pi$, două puncte de pe cerc, iar M mijlocul segmentului determinat de ele. Atunci

$$AB = 2AM = 2\sin(b-a) = 2(\sin b \cos a - \cos b \sin a).$$

Dacă punctele A şi B au ambele coordonate raţionale, atunci distanţa AB este număr raţional. Vom arăta că este posibil să alegem o infinitate de puncte pe cercul trigonometric, având ambele coordonate raţionale; va rezulta astfel că răspunsul la întrebarea din problemă este afirmativ. Pentru aceasta, este suficient să considerăm puncte de coordonate $\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \frac{2mn}{m^2+n^2}\right)$, cu $m, n \in \mathbb{Z}$ şi, astfel, soluţia este completă.