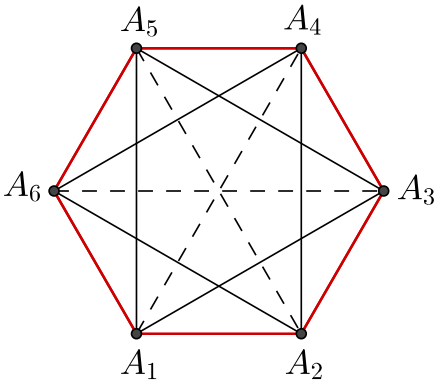
Problema 2. Laturile unui hexagon $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ se vopsesc cu roşu, iar diagonalele cu roşu sau albastru. Câte colorări au proprietatea că fiecare triunghi $A_iA_jA_k$, $\{i,j,k\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$, are măcar o latură roşie?

Concursul Náboj, Cehia şi Slovacia, 2011

Soluţie:
În afara triunghiurilor $A_1A_3A_5$ şi $A_2A_4A_6$, toate celelalte triunghiuri au drept latură măcar una laturile hexagonului, deci aceste triunghiuri au deja cel puţin o latură roşie. Pentru ca această condiţie să fie îndeplinită şi de triunghiurile $A_1A_3A_5$ şi $A_2A_4A_6$, trebuie să vopsim diagonalele A_1A_3, A_3A_5, A_5A_1 astfel încât cel puţin una din acestea să fie roşie şi la fel pentru diagonalele A_2A_4, A_4A_6, A_6A_2. Fiecare din diagonalele A_1A_3, A_3A_5, A_5A_1 poate fi colorată în două moduri, deci laturile triunghiului $A_1A_3A_5$ pot fi colorate în $2^3 = 8$ moduri. Dintre aceste colorări nu convine cea cu toate laturile albastre; aşadar diagonalele A_1A_3, A_3A_5, A_5A_1 pot fi colorate în 7 feluri. La fel pentru diagonalele A_2A_4, A_4A_6, A_6A_2. Rămân de colorat diagonalele A_1A_4, A_2A_5 şi A_3A_6. Nu există nicio restricţie asupra culorii acestora, deci culoarea fiecăreia poate fi aleasă în două moduri.

În final, avem $7^2 \cdot 2^3 = 392$ de colorări cu proprietatea din enunţ.