Problema 1. Demonstraţi că orice număr natural se poate scrie ca diferenţa a două numere naturale care au acelaşi număr de divizori primi.

Olimpiadă Rusia, 1999

Soluţie:
Evident, putem scrie $0 = 2 - 2$.
Dacă n este un număr par nenul, putem scrie $n = 2n - n$, scriere în care numerele n şi $2n$ au acelaşi număr de factori primi. (De fapt, au chiar aceiaşi divizori.)
Dacă n este impar, vrem să îl scriem pe n ca $n = dn - (d-1)n$ în care numerele dn şi $(d-1)n$ să aibă cu un divizor prim mai mult decât n. Îl putem lua pe d cel mai mic număr prim impar cu care n nu se împarte. Atunci numărul nd îi are ca divizori primi pe d însuşi precum şi divizorii primi ai lui n (care sunt diferiţi de d), deci dn care cu un divizor prim mai mult decât n. Pe de altă parte, $(d-1)n$ este par, dar $d-1$ nu poate avea divizori primi impari care să nu fie şi ai lui n pentru că d este cel mai mic asemenea divizor prim. Aşadar, divizorii primi ai lui $(d-1)n$ sunt divizorii primi ai lui n la care se adaugă 2.