Problema 3: *Fie* $a,b,c>0$ *şi funcţia* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}{3a^x\cdot b^x\cdot c^x}$.

a) *Demonstraţi că funcţia* f *este crescătoare;*

b) *Demonstraţi că* $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}+\dfrac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\geq 2$

Soluţie:

a) Presupunem $a\leq b\leq c$. Fie apoi $t\geq 0$ şi avem

$$\frac{f(x+t)}{f(x)}=\frac{a^{3x+3t}+b^{3x+3t}+c^{3x+3t}}{a^tb^tc^t\left(a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}\right)}=\frac{1}{a^tb^tc^t}\left(\frac{a^{3x}}{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}\cdot a^{3t}+\frac{b^{3x}}{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}\cdot b^{3t}+\frac{c^{3x}}{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}\cdot c^{3t}\right)$$

.

Folosind inegalitatea lui Cebâşev avem

$$\frac{f(x+t)}{f(x)}\geq\frac{1}{3a^tb^tc^t}\left(\frac{a^{3x}}{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}+\frac{b^{3x}}{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}+\frac{c^{3x}}{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}\right)\left(a^{3t}+b^{3t}+c^{3t}\right)=\frac{a^{3t}+b^{3t}+c^{3t}}{3a^tb^tc^t}.$$

Dar $\dfrac{a^{3t}+b^{3t}+c^{3t}}{3a^tb^tc^t}\geq 1$ conform inegalităţii mediilor, ceea ce încheie demonstraţia.

b) Deoarece funcţia f este crescătoare avem $f(1)\geq f\left(\dfrac{1}{3}\right)$, adică $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}\geq\dfrac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}$. Atunci avem

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\geq\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\geq 2.$$