iar pentru $n = k^2$, rezultă:

$$a_{k^2} = 2 + \cos k\pi = 2 + (-1)^k,$$

adică şirul $(a_n)_n$ posedă un subşir divergent, deci este şi el divergent. Acum vom arăta că are loc egalitatea:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1. \tag{1.2}$$

În acest scop, observăm că egalitatea (1.2) este echivalentă cu egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = 0,$$

sau încă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = 0, \tag{1.2'}$$

pe care o vom stabili fără dificultate. Într-adevăr, ţinând seama şi de (1.1), obţinem:

$$\left|\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right| = \frac{|a_{n+1} - a_n|}{|a_n|} \le |a_{n+1} - a_n| = \left|\cos \pi\sqrt{n+1} - \cos \pi\sqrt{n}\right| =$$

$$= 2\left|\sin \frac{\pi\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{2}\right| \left|\sin \frac{\pi\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}{2}\right| \le$$

$$\le 2\left|\sin \frac{\pi\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}{2}\right| = 2\left|\sin \frac{\pi}{2\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}\right| \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0,$$

de unde, pe baza criteriului majorării, concluzia căutată. (Exemplul este luat din [24]; a se vedea şi [23].)

2. Diferite comportări ale diferenţei $\Delta a_n \overset{\text{def}}{=} a_{n+1} - a_n$, pentru un şir $(a_n)_n$ care tinde la ∞ (sau la $-\infty$)

Notaţia Δa_n este consacrată; ea se foloseşte în mod curent în calculul cu diferenţe finite, ca şi notaţia $\nabla a_n = a_n - a_{n-1}$ (în această problematică, a se vedea [21], pp. 99-103). Dacă $a_n \to \infty$, atunci şirul $(\Delta a_n)_n$ poate avea diferite comportări, astfel:

(a) $\Delta a_n \to \infty$; exemplu: $a_n = n^2$; $[\Delta a_n = 2n + 1]$;

(b) $\Delta a_n \to \alpha \in \mathbb{R}_+^*$; exemplu: $a_n = \alpha n + \frac{1}{n}$; $\left[\Delta a_n = \alpha + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\right]$;

(c) $\Delta a_n \to 0$; exemplu: $a_n = \sqrt{n}$; $\left[\Delta a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right]$;[1)]

(d) $(\Delta a_n)_n$ nu are limită; exemplu: $a_n = (2 + (-1)^n)\, n$; $[\Delta a_n = -2n+1$ pentru n par; $\Delta a_n = 2n + 3$ pentru n impar$]$. [2)]

[1)] Dacă în locul şirului $(a_n)_n$, care tinde la ∞, am considera un şir convergent $(a_n)_n$, atunci proprietatea $\Delta a_n \to 0$ ar rezulta în mod banal. (N.A.)

[2)] Proprietatea ca $(\Delta a_n)_n$ să fie divergent poate avea loc şi în cazul unui şir $(a_n)_n$ mărginit. Exemplu: $a_n = (-1)^n$, pentru care $\Delta a_n = 2 \cdot (-1)^{n+1}$. (N.A.)

Exemple asemănătoare se pot obţine în cazul în care $a_n \to -\infty$.

3. Diferite tipuri de tindere la 0 a diferenţei Δa_n, pentru un şir $(a_n)_n$ care tinde la ∞. Utilizarea logaritmului ca factor de „încetinire“

Am văzut la numărul **2** că, şi pentru un şir $(a_n)_n$, care tinde la ∞, putem avea $\Delta a_n \to 0$. Se pot găsi însă diferite „viteze “ de tindere la 0 pentru Δa_n. Astfel putem avea:

(a) $n\Delta a_n \to 1$, dacă $a_n = \ln n$, sau $a_n = H_n \overset{\text{def}}{=} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$;

(b) $n\Delta a_n \to 0$, dacă $a_n = \ln(\ln n)$, sau $a_n = \frac{1}{2\ln n} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln n}$

(la stabilirea faptului că $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \infty$ se va folosi partea dreaptă a inegalităţii $\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1)} < \ln(\ln(k+1)) - \ln\ln k < \frac{1}{k\ln k}$; pentru o stabilire fără ajutorul derivatelor, a acesteia, a se vedea [27], pp. 93-94).

Totodată, există şi posibilitatea de a avea, pentru un şir $(a_n)_n$, $a_n \to \infty$, o tindere încă şi mai „lentă“ către infinit; de exemplu, poate avea loc relaţia:

(c) $a_{n^2} - a_n \to 0$

(cerută în problema [20]). Aceasta se realizează, de exemplu, pentru şirul definit de „logaritmul triplu“(în sensul compunerii), anume $a_n = \ln(\ln(\ln n))$ (pentru soluţie, a se vedea, de exemplu [22], [27]).

4. Două şiruri $(a_n)_n$ şi (b_n) cu $b_n \to \infty$, pentru care reciproca lemei lui Stolz[1)] nu este valabilă

Fie $a_n = (-1)^n$ şi $b_n = n$. Atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ (în baza criteriului majorării), dar $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 2 \cdot (-1)^{n+1}$ nu are limită. Deci reciproca lemei lui *Stolz* nu este, în general, valabilă. Contraexemplul este preluat din [13].

[1)]Enunţul şi o demonstraţie directă a lemei pot fi găsite în [14] (pentru ediţia din 1971, a se vedea pp. 317-319). (N.A.)

Exemple şi contraexemple în analiza matematică liceală

Andrei Vernescu[1) 2)]

Abstract. We present some of the basic but nontrivial examples and counterexamples in Calculus and in the beginning of the Mathematical Analysis, respecting the level of the contemporary Romanian highschool syllabus.

Keywords: Sequence of real numbers, limit of a real function at a point, continuity, derivative, Riemann integral, antiderivative.

MSC : 26A06, 26A09, 26A15, 26A27, 26A36, 26C15.

III. Exemple şi contraexemple referitoare la funcţii, limite, continuitate, proprietatea lui Darboux

5. O funcţie care nu admite limită la ∞. Generalizare

Este funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Stabilirea rezultatului constă în a arăta că nu este îndeplinită condiţia din teorema de caracterizare a limitelor de funcţii cu ajutorul şirurilor.

Se poate proceda în două moduri:

[1)]Conf. dr., Universitatea Valahia din Târgovişte, e-mail: avernescu@clicknet.ro

[2)]Prezentul text conţine, sub o formă puţin mai dezvoltată, conferinţa prezentată în ziua de 28 iulie 2009, în cadrul cursurilor pentru perfecţionarea profesorilor, Buşteni, 28 iulie - 5 august 2009. (N.R.)

(i) Fie şirurile $(x'_n)_n$ şi $(x''_n)_n$, de termen general $x'_n = \frac{\pi}{2}+2n\pi$, respectiv $x''_n = -\frac{\pi}{2}+2n\pi$. Atunci $x'_n \to \infty$, $x''_n \to \infty$ şi avem $f(x'_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1 \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 1$, precum şi $f(x''_n) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = -1 \xrightarrow[(n\to\infty)]{} -1$, deci f nu are limită la ∞[1)].

(ii) Fie şirul $(x_n)_n$ de termen general $x_n = \frac{\pi}{2}+n\pi$. Rezultă că $x_n \to \infty$ şi $f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = (-1)^n$, divergent, de unde aceeeaşi concluzie.

La aceeaşi concluzie, a inexistenţei limitei la ∞, se ajunge folosind funcţia cosinus, funcţia tangentă (definită pe mulţimea $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$), sau funcţia cotangentă (pe mulţimea $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\}$).

O generalizare imediată este următoarea: *orice funcţie periodică, neconstantă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu admite limită la ∞.* Într-adevăr, dacă $T > 0$ este perioada şi dacă $a = f(\alpha)$ şi $b = f(\beta)$ sunt două valori diferite ale funcţiei, atunci utilizarea şirurilor de termen general $x'_n = \alpha + nT$ şi $x''_n = \beta + nT$ conduce la concluzia enunţată.

Toate rezultatele menţionate se transpun fără nicio dificultate pentru limita la $-\infty$.

6. O funcţie care nu admite limite laterale (şi deci nici limită) în 0

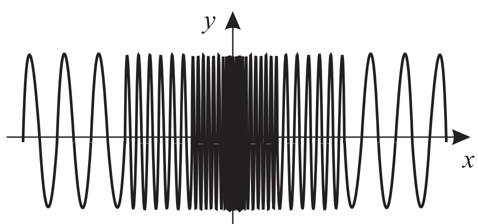

Fig. 1

Este funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0 \end{cases}$ (o schiţă a graficului este redată în fig. 1).

Funcţia nu admite limite laterale în punctul $x = 0$, ceea ce se poate obţine utilizând, de asemenea, caracterizarea cu şiruri a limitelor (laterale) ale unei funcţii într-un punct.

De exemplu, pentru a arăta că funcţia nu are limită la dreapta în 0, se pot utiliza şirurile de termen general $x'_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$ şi $x''_n = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}+n\pi}$; desigur $x'_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dar $x'_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$, analog şi pentru $(x''_n)_n$, dar

1)Se pot alege şi alte şiruri, de exemplu $x'_n = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, împreună cu $x''_n = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi$. (N.A.)

$f\left(x_n'\right) = 1 \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 1$, în timp ce $f\left(x_n''\right) = -1 \xrightarrow[(n\to\infty)]{} -1$. Se poate lucra şi cu un singur şir, de exemplu $x_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + n\pi}$ etc. Pentru a arăta că funcţia nu are limită la stânga în punctul 0, se procedează analog, folosindu-se, de exemplu, şirurile de termen general $\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} - 2n\pi}$ şi $\dfrac{1}{-\dfrac{\pi}{2} - n\pi}$, $n \in \mathbb{N}^*$, sau numai şirul de termen general $\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} - n\pi}$ etc.

Neadmiţând o limită laterală în 0, funcţia nu admite nici limită (bilaterală) în acest punct. Situaţia din punctul $x_0 = 0$ constituie o discontinuitate de speţa a doua.

7. O funcţie care nu admite limite laterale (şi deci nici limită) în niciun punct $x_0 \in \mathbb{R}$

Este funcţia lui *Dirichlet*[1] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \quad {}^{2)}$$

Stabilirea rezultatului se face apelând tot la caracterizarea cu şiruri a limitei unei funcţiei într-un punct. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, oarecare.[3]

Să considerăm un şir $\left(x_n'\right)_n$ cu toţi termenii raţionali (scris prescurtat: $\left(x_n'\right)_n \subset \mathbb{Q}$) cu $x_n' \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, [4], dar astfel încât $x_n' \to x_0$. Atunci $f\left(x_n'\right) = 1 \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 1$. Fie acum un şir $\left(x_n''\right)_n$ cu toţi termenii iraţionali ($\left(x_n''\right)_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), cu $x_n'' \neq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$[5], dar astfel încât $x_n'' \to x_0$. Atunci $f\left(x_n''\right) = 0 \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$.

---

[1] *Peter Gustave Lejeune Dirichlet* (1805-1859), mare matematician german. (N.A.)

[2] Apariţia funcţiilor de acest tip a avut o deosebită importanţă în evoluţia noţiunii de funcţie, până la gradul maxim de generalitate de astăzi. În secolul al XVIII-lea şi chiar la începutul secolului al XIX-lea, încă se mai considera că orice funcţie numerică trebuie să fie legată de o expresie analitică, de o formulă. De abia ulterior s-a degajat definiţia cea mai generală a funcţiei, care cere doar ca, la orice element din domeniul de definiţie, să corespundă un element unic din codomeniu.

Funcţiile $f(x) = \begin{cases} a, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ b, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ şi $f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ h(x), & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ au căpătat denumirea de funcţii de tip *Dirichlet*. (N.A.)

[3] Este recomandabil să se lucreze direct cu x_0 real, fără a analiza separat cazurile $x_0 \in \mathbb{Q}$, respectiv $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, care ar constitui doar o pierdere de timp. (N.A.)

[4] Dacă am şti că $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci condiţia teoretică $x_n \neq x_0$ ar fi de la sine îndeplinită. Dar, cum am menţionat, noi lucrăm direct cu $x_0 \in \mathbb{R}$, deci condiţia trebuie pusă. (N.A.)

[5] Observaţie asemănătoare, pentru cazul că $x_0 \in \mathbb{Q}$. (N.A.)

Deci funcţia f nu admite limită în punctul x_0. Întrucât x_0 a fost arbitrar, rezultă că funcţia f nu are limită în nici un punct al axei reale. Se mai spune că f este total discontinuă. O schiţă a graficului este sugerată în fig. 2.

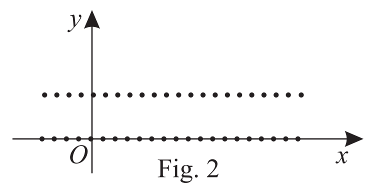

Fig. 2

De asemenea, funcţia lui *Dirichlet*, fiind neconstantă şi periodică (de perioadă orice număr raţional $T > 0$ (uşor verificabil!)), nu admite nici limită la $+\infty$, respectiv $-\infty$.

Ca observaţie metodologică utilă de reţinut, subliniem încă o dată că, în toată justificarea precedentă, procedeul adoptat, de a considera direct $x_0 \in \mathbb{R}$, este mai rapid decât examinarea separată a cazurilor $x_0 \in \mathbb{Q}$ şi $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Funcţia precedentă mai poate servi drept exemplu şi pentru alte numeroase proprietăţi „negative“: nu este continuă în niciun punct, nu este derivabilă în niciun punct, nu este integrabilă *Riemann* pe niciun interval $[a, b]$ (cu $a < b$), nu are proprietatea valorilor intermediare, a lui *Darboux* pe niciun astfel de interval, nu admite primitive pe niciun interval. Totodată, întrucât $f^2 = f$, aceasta constituie şi un exemplu pentru care toate proprietăţile „patologice“ menţionate se pot transmite de la o funcţie la pătratul său.

Pentru funcţiile de tip *Dirichlet*:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ h(x), & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

se arată (folosind tot caracterizarea cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct) că f este continuă numai în acele puncte $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care $g(x_0) = h(x_0)$, dacă astfel de puncte există (pentru funcţia-prototip a lui *Dirichlet*:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

neexistând astfel de puncte). Vom utiliza o astfel de funcţie la exemplul **11**.

8. Funcţii iraţionale

Întrucât elevii sunt familiarizaţi încă din clasele precedente cu noţiunea de număr raţional, prezentat ca raport de două numere întregi (relativ prime)[1)], este firesc să se definească şi noţiunea de funcţie raţională ca raport

[1)] La acel nivel, nu este încă indicată prezentarea numărului raţional ca o clasă de echivalenţă. (N.A.)

de polinoame, $f(x) = \dfrac{U(x)}{V(x)}$, cu $V \neq 0$ [1] [2], desigur funcţia având sens pe mulţimea $D_f \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid V(x) \neq 0\}$.

Astfel apare şi cerinţa de a explica de ce anumite funcţii nu intră în această categorie, adică nu sunt funcţii raţionale. În acest scop, reamintim câteva observaţii binecunoscute asupra funcţiilor raţionale, anume:

(α) Întrucât funcţia polinomială V, de la numitor, admite cel mult un număr finit de rădăcini reale distincte, $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, mulţimea D_f este mulţimea numerelor reale, $\mathbb{R}$, din care s-au eliminat cel mult un număr finit de puncte, deci este o reuniune finită de intervale deschise disjuncte, adiacente:

$$D_f = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \ldots \cup (x_k, \infty)$$

(subînţelegându-se că, în cazul în care V nu admite rădăcini reale, avem $D_f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$).

(β) Funcţiile raţionale sunt continue şi derivabile în orice punct din domeniul de definiţie D_f.[3]

(γ) Funcţiile raţionale au limite la $+\infty$ şi la $-\infty$ finite şi egale între ele, dacă $\mathrm{gr}(U) \leq \mathrm{gr}(V)$ (egale cu 0, dacă $\mathrm{gr}(U) < \mathrm{gr}(V)$), respectiv infinite (cu acelaşi semn sau de semne contrare) dacă $\mathrm{gr}(U) > \mathrm{gr}(V)$.

Prezentăm, în continuare, câteva exemple de funcţii iraţionale.

(a) Funcţia $x \mapsto |x|$ nu este funcţie raţională deoarece nu este derivabilă în origine.

(b) Funcţiile parte întreagă $x \mapsto [x]$ şi parte fracţionară $x \mapsto \{x\}$ nu sunt funcţii raţionale, deoarece nu sunt continue în punctele $x_0 = n \in \mathbb{Z}$.

(c) Funcţia $x \mapsto \sqrt{x}$ nu este funcţie raţională deoarece nu este definită decât pe semidreapta $[0, \infty)$.[4]

(d) Funcţia $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ nu este funcţie raţională.

Într-adevăr, prespunând prin absurd contrariul, am avea $\sqrt{x^2+1} = \dfrac{U(x)}{V(x)}$, unde $x \mapsto U(x)$ şi $x \mapsto V(x)$ sunt două funcţii polinomiale, cu $V(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Rezultă:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{U(x)}{xV(x)},$$

[1] Adică funcţia polinomială V este diferită de funcţia polinomială identic nulă. (N.A.)

[2] Polinoamele U şi V se consideră, de asemenea, relativ prime, deci fracţia $\dfrac{U}{V}$ este nesimplificabilă. (N.A.)

[3] Reamintim (dacă mai era necesar!) că, pentru funcţia $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, de exemplu, problema continuităţii în punctul $x_0 = 0$ nu are sens! Pur şi simplu, f nu este definită în punctul $x_0 = 0$. (N.A.)

[4] Pentru stabilirea rezultatelor de la punctele (a) – (c) se pot da şi alte argumentări, la care invităm cititorul să reflecteze. (N.A.)

unde funcţia din membrul drept este, de asemenea, raţională (definită pe $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R}^*$). Considerând limitele pentru $x \to \infty$ şi apoi pentru $x \to -\infty$, obţinem pentru funcţia din membrul stâng valorile 1, respectiv -1, ceea ce nu poate avea loc pentru funcţia raţională din membrul drept. Contradicţie! [1)]

(e) Funcţia $x \mapsto \ln x$ nu este funcţie raţională, deoarece nu este definită decât pe intervalul $(0, \infty)$.

(f) Funcţia $x \mapsto \mathrm{e}^x$ nu este funcţie raţională, din cauza situaţiei limitelor la $+\infty$, respectiv $-\infty$.

Propunem acum cititorului să stabilească – folosind metode asemănătoare – că următoarele funcţii definite pe $\mathbb{R}$ nu sunt funcţii raţionale:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

9. O sumă de fracţii raţionale $\sum_{k=1}^{n} a_k \left(a_k = \frac{p(k)}{q(k)}\right)$, care nu se poate restrânge ca funcţie raţională de n (după [25])

Să considerăm întâi, ca exemplu introductiv, formula binecunoscută:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \left(= \frac{n}{n+1}\right).$$

Ea oferă „restrângerea“ sumei de funcţii raţionale de forma $\frac{1}{k(k+1)}$ (cu $k = 1, 2, 3, \ldots, n$) sub forma tot a unei funcţii raţionale, în variabila n, anume $\frac{n}{n+1}$.

O astfel de „restrângere“ nu mai este posibilă pentru alte sume, ca, de exemplu, pentru suma armonică:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Dar această simplă afirmaţie, neînsoţită de nicio explicaţie, de nicio justificare, este nesatisfăcătoare! Se poate însă demonstra

Teorema 1. *Nu există nicio funcţie raţională cu coeficienţii reali $f : E \to \mathbb{R}$ (unde $\mathbb{N}^* \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$), astfel încât:*

$$H_n = f(n), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \tag{9.1}$$

Demonstraţie. Să presupunem, prin absurd, că ar exista o astfel de funcţie f; aceasta ar însemna că există două funcţii polinomiale $U, V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$U(x) = a_p x^p + \ldots + a_0, \qquad V(x) = b_q x^q + \ldots + b_0,$$

[1)] Toate exemplele (a) – (d), cât şi demonstraţiile respective au fost adaptate din [9], pag. 62-63. (N.A.)

cu $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, $V(x) \neq 0$, pentru orice $x \in E$ [1]), astfel încât:

$$f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}, \quad \forall\, x \in E. \tag{9.2}$$

Cu această notaţie, egalitatea (9.1) s-ar scrie:

$$H_n = \frac{U(n)}{V(n)}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \tag{9.3}$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ şi ţinând seama că $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \infty$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U(n)}{V(n)} = \infty$. Deci $p > q$, adică $p - q > 0$, sau, cum $p, q \in \mathbb{N}$, avem $p - q \geq 1$. Împărţim egalitatea (9.3) prin n^{p-q} şi găsim:

$$\frac{H_n}{n^{p-q}} = \frac{U(n)}{n^{p-q}V(n)}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \tag{9.4}$$

unde, în membrul drept, funcţiile polinomiale de la numărător şi de la numitor au acelaşi grad, p, iar coeficienţii lor dominanţi sunt a_p, respectiv b_q.

Trecând acum la limită pentru $n \to \infty$, în relaţia (9.4) se obţine $0 = \frac{a_p}{b_q}$.[2])

Contradicţie!

Pe o cale asemănătoare, se demonstrează că nu există nicio funcţie raţională cu coeficienţi reali $f : E \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{N}^* \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$), astfel încât să avem:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = f(n), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

(pentru detalii, a se vedea [25]).

10. Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to (a, b)$ cu $a < b$, este bijectivă, atunci aceasta nu este funcţie raţională

Într-adevăr, să presupunem, prin absurd, că f este o funcţie raţională $f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ (şi, desigur, $V(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$). Întrucât, funcţia f este injectivă şi continuă, ea va rezulta, în baza unui rezultat binecunoscut (v. [11], cap II, §2), că f este strict monotonă. În acest caz, în baza altui rezultat binecunoscut, ar avea loc una din următoarele situaţii:

I. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, dacă f este strict crescătoare;

---

[1])În cazul particular $E = \mathbb{R}$, ultima condiţie revine la faptul că funcţia polinomială V admite numai rădăcini complexe. (N.A.)

[2])Obţinerea rezultatului $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{H_n}{n^r} = 0$ (cu notaţia $r = p - q$, deci $r \geq 1$) este binecunoscută; ea se poate baza, de exemplu, pe egalitatea $\frac{H_n}{r} = \frac{H_n}{n} \cdot \frac{1}{n^{r-1}}$ (unde $r - 1 \geq 0$), iar limita primului factor din membrul drept poate fi găsită cu lema lui *Stolz*. (N.A.)

II. $\lim\limits_{x\to-\infty} = b$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, dacă f este strict descrescătoare.

În ambele cazuri, limitele la $-\infty$ şi la ∞ sunt finite şi diferite între ele, ceea ce contrazice situaţia limitelor la $-\infty$ şi la $+\infty$ pentru o funcţie raţională. Aşadar, f nu este o funcţie raţională.

*

* *

Această delimitare prezintă un anumit interes teoretic în stabilirea echivalenţei cardinale [1)] dintre mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale şi un interval oarecare (a, b) (cu $a < b$)[2)], care poate fi ales ca fiind intervalul „standard“ $(0, 1)$, sau intervalul $(-1, 1)$[3)]. Astfel, bijecţii f de la $\mathbb{R}$ la $(-1, 1)$, sunt $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x$, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (funcţia numită şi „tangentă hiperbolică“ notată th x), $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ (propunem cititorului studiul şi reprezentarea grafică). Dar, în orice carte de analiză matematică, este în ordinea firească a lucrurilor ca, întâi să se prezinte şi să se analizeze mulţimea $\mathbb{R}$, a numerelor reale („materia primă“ a analizei matematice[4)]), iar de abia mai târziu să se treacă la definirea riguroasă a funcţiilor mai complicate decât modulul (absolut necesar de a fi definit la început, fiind folosit la descrierea distanţei pe $\mathbb{R}$!), funcţiile polinomiale şi funcţiile raţionale (ne referim la funcţiile radical, exponenţială, logaritm, funcţiile trigonometrice şi inversele lor). Astfel, dintre toate cele cinci funcţii bijective $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ prezentate anterior, va fi de preferat cea mai „simplă“, adică ultima $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$. Rezultatul demonstrat anterior ne arată că procesul de selectare a unei funcţii şi mai „simple“, prin renunţarea la modul, nu mai poate continua: nu putem găsi o funcţie bijectivă $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, care să fie raţională! (Este interesant de notat că,

---

[1)] Reamintim că două mulţimi A şi B se numesc cardinal echivalente, dacă există o funcţie bijectivă $f : A \to B$. Relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă în cadrul mulţimilor. Noţiunea a fost introdusă de *Georg Cantor* (1845 - 1918). (N.A.)

[2)] Ambele mulţimi $\mathbb{R}$ şi (a, b) sunt nenumărabile. Reamintim că o mulţime cardinal echivalentă cu mulţimea $\mathbb{N}$, a numerelor naturale, se numeşte mulţime numărabilă, mulţimile $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ sunt, de asemenea, mulţimi numărabile. O mulţime care nu este cardinal echivalentă cu mulţimea $\mathbb{N}$ se numeşte mulţime nenumărabilă. Tot mulţimi nenumărabile mai sunt $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $\mathbb{C}$. O mulţime cardinal echivalentă cu mulţimea $\mathbb{R}$, a numerelor reale, se numeşte mulţime de puterea continuului. (N.A.)

[3)] Alegerea intervalului „standard“ $(0, 1)$ sau a intervalului $(-1, 1)$ nu micşorează cu nimic generalitatea, deoarece între oricare două intervale deschise (a, b) şi (α, β) (cu $a < b$ şi $\alpha < \beta$) se poate stabili o bijecţie, de exemplu funcţia de gradul I care transformă pe a în α şi pe b în β. (N.A.)

[4)] Expresie preluată din [6]. (N.A.)

invers, de la $(-1,1)$ la $\mathbb{R}$, găsim cu uşurinţă bijecţii raţionale, de exemplu $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$.)

11. O funcţie $f:I\to I$, $I=[0,1]$, cu $f(I)=I$, dar care nu are proprietatea lui Darboux (după [11])

Este o funcţie de tip *Dirichlet* $f:I\to I$ $(I=[0,1])$:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{pentru} \quad x\in\mathbb{Q}\cap I \\ x^2, & \text{pentru} \quad x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap I. \end{cases}$$

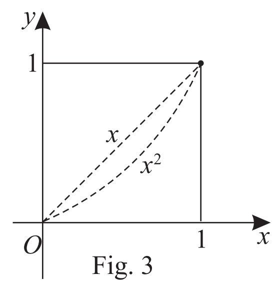

Fig. 3

Se obţine uşor, cu o demonstraţie prin dublă incluziune, că are loc egalitatea $f(I)=I$ (la stabilirea ambelor incluziuni, se vor considera separat cazurile când se lucrează cu valori raţionale, respectiv iraţionale).

Se poate însă arăta acum că funcţia f nu are proprietatea lui *Darboux*. Într-adevăr, pentru a face o alegere convenabilă, fie $x_1=\dfrac{1}{4}$, iar $x_2=\dfrac{1}{2}$; avem $x_1<x_2$. Să considerăm acum o valoare iraţională, din intervalul „de pe axa Oy“ $(f(x_1),f(x_2))=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$, de exemplu, $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. Căutăm un număr $c\in(x_1,x_2)=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$, „de pe axa Ox“, astfel încât să avem $f(c)=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. Numărul c nu poate fi raţional, deoarece, în acest caz, am avea $f(c)=c\in\mathbb{Q}$, deci $f(c)\neq\lambda$. Aşadar c trebuie să fie iraţional . În acest al doilea caz, am avea $f(c)=c^2$, deci, din condiţia $f(c)=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$, rezultă că trebuie să alegem $c=\dfrac{1}{\sqrt[4]{7}}$. Însă $\dfrac{1}{\sqrt[4]{7}}>\dfrac{1}{2}$, deci $c\notin(x_1,x_2)$. Aşadar, nu există niciun număr real $c\in(x_1,x_2)$, astfel încât $f(c)=\lambda$, deci funcţia f nu are proprietatea lui *Darboux*.

Contraexemplul prezentat ne arată că, pentru o funcţie $f:I\to\mathbb{R}$ (unde I este un interval), satisfacerea proprietăţii lui *Darboux* nu este echivalentă cu transformarea unui anumit interval $I_1\subseteq I$ [1)] tot într-un interval. Proprietatea lui *Darboux* este echivalentă cu transformarea oricărui interval $I_1\subseteq 1$ tot într-un interval. Menţionăm că, în unele cărţi de analiză matematică, această din urmă proprietate este luată tocmai drept definiţie a proprietăţii lui *Darboux* (a se vedea [4], pag. 136).

[1)] În contraexemplul prezentat, avem chiar $I_1=I=[0,1]$ ceea ce nu joacă un rol esenţial, deoarece funcţia putea fi definită şi pe un interval J, astfel încât $J\supset[0,1]$. (N.A.)