Problemă. Să se arate că oricum am alege cinci numere întregi, există două dintre acestea, care au suma sau diferenţa divizibile cu 7.

Ioan Tomescu, Bucureşti

Soluţie Fie $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ cinci numere întregi arbitrare. Se constată că pentru orice x număr întreg avem $x^2 = 7m+k$, unde $m \in \mathbb{Z}$, iar $k \in \{0,\ 1,\ 2, 4\}$, adică resturile pe care le dau pătratele perfecte la împărţirea cu 7 sunt 0, 1, 2, sau 4.

Deoarece avem cinci numere $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ şi prin urmare cinci pătrate ale lor, dar numai patru resturi posibile, deducem, conform principiului cutiei, că printre ele sunt cel puţin două care vor da acelaşi rest la împărţirea cu 7. Adică există $x, y \in \{a,\ ,b,\ c,\ d,\ e\}$ astfel încât $x^2 - y^2$ se divide cu 7. Aşadar 7 divide produsul $(x+y)(x-y)$ şi fiind număr prim, se deduce că 7 divide $x+y$ sau 7 divide $x-y$.