Problema 2. Demonstraţi că pentru orice numere reale pozitive a, b, c, d, e, f are loc inegalitatea

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\leq\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}.$$

Când are loc egalitatea?

Olimpiadă Iugoslavia, 1985

Soluţie:
Să demonstrăm mai întâi că pentru orice numere reale pozitive x, y, z, t are loc inegalitatea

$$\frac{xy}{x+y}+\frac{zt}{z+t}\leq\frac{(x+z)(y+t)}{x+y+z+t}. \qquad (1)$$

Eliminând numitorii, inegalitatea (1) revine la
$(xyz+xyt+xzt+yzt)(x+y+z+t)\leq(xy+xt+yz+zt)(xz+xt+yz+yt)$,
adică, după desfacerea parantezelor şi reducerea termenilor asemenea, la
$4xyzt\leq x^2t^2+y^2z^2$, inegalitate evidentă, echivalentă cu $(xt-yz)^2\geq 0$.
Egalitate în (1) avem dacă şi numai dacă $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$.
Scriind inegalitatea (1) mai întâi pentru $x=a$, $y=b$, $z=c$, $t=d$ şi apoi pentru $x=a+c$, $y=b+d$, $z=e$, $t=f$ obţinem:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\leq\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}+\frac{ef}{e+f}\leq\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}.$$

Egalitate avem dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ şi $\frac{a+c}{b+d}=\frac{e}{f}$, adică, ţinând cont de faptul că $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, avem egalitate dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$.