Se consideră progresiile aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = p$ şi raţia q şi $(b_n)_{n\geq 1}$, cu $b_1 = q$ şi raţia p, unde p, q sunt numere prime distincte . Să se demonstreze că termenii comuni celor două progresii formează tot o progresie aritmetică a cărei raţie se va determina.

I. Nedelcu

Rezolvare

Progresiile sunt : $a_n \vdots \quad p, p+q, p+2q, p+3q, \ldots$ respectiv $b_n \vdots \quad q, q+p, q+2p, q+3p, \ldots$.

Fie x un termen comun. Atunci $x = p + i \cdot q = q + j \cdot p$, unde $i, j \in \mathbb{N}$ (1)

Din relaţia anterioară obţinem $p + i \cdot q = q + j \cdot p \Leftrightarrow q(i-1) = p(j-1) \Rightarrow q \mid p(j-1)$.

Deoarece $(p,q) = 1 \Rightarrow q \mid j-1$, deci $j - 1 = s \cdot q$, unde $s \in \mathbb{N}$.

Aşadar forma unui termen comun este $x = p + q + s \cdot p \cdot q$, unde $s \in \mathbb{N}$. Particularizând pe s obţinem progresia $c_n \vdots \quad p+q, p+q+pq, p+q+2pq, \ldots$ având raţia $p \cdot q$.