Problema 3. Se consideră patrulaterul $ABCD$ înscris într-un cerc de centru O şi rază R şi mijloacele M, N, P, Q ale arcelor mici de cerc AB, BC, CD, DA. Demonstraţi că dacă ariile triunghiurilor ABM, BCN, CDP şi DAQ sunt egale, atunci $ABCD$ este pătrat. Generalizare.

Lucian Dragomir

Soluţie. Fie $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$, $DA = t$ şi mijloacele M', N', P', Q' ale laturilor AB, BC, CD, respectiv DA.

Obţinem $MM' = OM - OM' = R - \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$. Analog deducem că $NN' = R - \sqrt{R^2 - \frac{y^2}{4}}$, $PP' = R - \sqrt{R^2 - \frac{z^2}{4}}$ şi $QQ' = R - \sqrt{R^2 - \frac{t^2}{4}}$.

Fie $f : (0, 2R] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} \cdot \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}\right)$.

Avem $S_{ABM} = \frac{AB \cdot MM'}{2} = f(x)$. Analog obţinem $S_{BCN} = f(y)$, $S_{CDP} = f(z)$ şi $S_{DAQ} = f(t)$. Se arată uşor că funcţia f este strict crescătoare, deci $f(x) = f(y) = f(z) = f(t)$ dacă şi numai dacă $x = y = z = t$, adică dacă şi numai dacă $ABCD$ este pătrat.

Generalizare: Se consideră $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, poligonul $A_1A_2 \ldots A_n$ înscris într-un cerc de centru O şi rază R şi mijloacele $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ale arcelor mici de cerc A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, $A_{n-1}A_n$, respectiv A_nA_1. Dacă ariile triunghiurilor $A_1A_2M_1$, $A_2A_3M_2, \ldots$, $A_{n-1}A_nM_{n-1}$ şi $A_nA_1M_n$ sunt egale, atunci poligonul $A_1A_2 \ldots A_n$ este regulat.