Clasa a X-a - Etapa 3

Problema 4. *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}^*$. *Demonstraţi că există* $J \subset \{1, 2, ..., n\}$ *cu proprietatea*

$$\left|\sum_{k\in J} z_k\right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} |z_k| .$$

Soluţie. Împărţim planul xOy în patru regiuni disjuncte prin trasarea bisectoarelor unghiurilor formate de axe. Fie

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(x;y)\,|y>0, y\geq x, y>-x\}, \\
R_2 &= \{(x;y)\,|x<0, y>x, y\leq -x\}, \\
R_3 &= \{(x;y)\,|y<0, y\leq x, y<-x\}, \\
R_4 &= \{(x;y)\,|x>0, y<x, y\geq -x\}.
\end{aligned}$$

Evident

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{l=1}^{4} \sum_{z_k \in R_l} |z_k| .$$

Evident, există $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ cu proprietatea

$$\sum_{z_k \in R_l} |z_k| \geq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} |z_k| . \tag{1}$$

Presupunem $l = 1$. Atunci, pentru orice $z = x + iy \in R_1$, avem $y^2 \geq x^2$. Atunci $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2}y$. Atunci

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{z_k\in R_1} z_k\right| &= \sqrt{\left(\sum_{z_k\in R_1} \operatorname{Re} z_k\right)^2 + \left(\sum_{z_k\in R_1} \operatorname{Im} z_k\right)^2} \\
&\geq \sum_{z_k\in R_1} \operatorname{Im} z_k \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{z_k\in R_1} |z_k| .
\end{aligned}$$

Concluzia se deduce din relaţia (1).

Dacă $l \in \{2, 3, 4\}$, înpărţim toate elementele cu $\cos \frac{l\pi}{2} + i \sin \frac{l\pi}{2}$. Dacă $z \in R_l$, atunci $\frac{z}{\cos \frac{l\pi}{2} + i \sin \frac{l\pi}{2}} \in R_1$ şi reluăm raţionamentul anterior.