Problema 3. Fie a, b şi c numere întregi care verifică relaţiile $|a-2b+3c| = |2a+3b-c| = |3a+b+2c|$ şi $|a+b+c| \leq 2020$. Determinaţi numărul tripletelor (a, b, c) care verifică aceste condiţii.

Mihai Bunget, Tg. Jiu

Soluţie: Avem $|a-2b+3c| = |2a+3b-c| = |3a+b+2c| = k$, unde k este număr întreg.

De aici $a-2b+3c = \pm k$, $2a+3b-c = \pm k$ şi $-3a-b-2c = \pm k$.

Adunând cele trei relaţii obţinem $0 = k \cdot (\pm 1 + \pm 1 + \pm 1)$, de unde $k = 0$.

Acum, din $a-2b+3c = 0$ obţinem $a = 2b-3c$ şi înlocuind în $2a+3b-c = 0$ obţinem $4b-6c+3b-c = 0$ adică $7b-7c = 0$, de unde $b = c$. Atunci $a = 2c-3c$, adică $a = -c$.

Cu aceasta, relaţia $|a+b+c| \leq 2020$ devine $|c| \leq 2020$ sau $-2020 \leq c \leq 2020$. Avem 4041 de numere întregi care verifică ultima relaţie, deci vom avea 4041 de triplete.