Problemă. Se consideră $a,\ b,\ c$ numere reale pozitive cu $abc = 1$. Să se arate că: $\dfrac{a}{2+bc} + \dfrac{b}{2+ca} + \dfrac{c}{2+ab} \geq 1$.

Manuela Prajea

Soluţie. Avem

$$\frac{a}{2+bc} + \frac{b}{2+ca} + \frac{c}{2+ab} = \frac{a^2}{2a+1} + \frac{b^2}{2b+1} + \frac{c^2}{2c+1} \overset{CBS}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)+3}.$$

Notând $s = a+b+c$, din inegalitatea mediilor şi $abc = 1$ avem $s \geq 3$. Folosind cele de mai sus, este suficient să arătăm că $\dfrac{s^2}{2s+3} \geq 1$ pentru orice $s \geq 3$. Acestă inegalitate se scrie echivalent $(s-1)^2 \geq 4$, ceea ce este evident pentru orice $s \geq 3$. Cu aceasta inegalitatea este demonstrată.

Egalitate avem pentru $a = b = c = 1$.