Problema 2.
a) Arătaţi că dacă $a, b, c \geq 1$, atunci $a+b+c+3abc \geq 2(ab+bc+ca)$. Când are loc egalitatea?
b) Arătaţi că dacă $a, b, c \in [0,1]$, atunci $a+b+c+3abc \geq 2(ab+bc+ca)$. Când are loc egalitatea?
c) Este adevărat că $a+b+c+3abc \geq 2(ab+bc+ca)$, pentru orice $a, b, c \geq 0$?

Soluţie: Inegalitatea din enunţ se poate scrie echivalent

$$a(b-1)(c-1)+b(c-1)(a-1)+c(a-1)(b-1) \geq 0.$$

a) Dacă $a, b, c \geq 1$, fiecare termen din membrul stâng al inegalităţii de mai sus este mai mare sau egal cu 0 ca produs de trei numere nenegative. Egalitate avem dacă fiecare termen este 0, adică, a, b, c fiind nenule, dacă $(a-1)(b-1)=(b-1)(c-1)=(c-1)(a-1)=0$. Această condiţie se realizează dacă şi numai dacă două dintre numerele a, b, c sunt egale cu 1, iar cel de-al treilea este orice număr mai mare sau egal cu 1.

b) Dacă $a, b, c \in [0,1]$, fiecare termen este mai mare sau egal cu 0 ca produs de trei numere, unul ≥ 0, celelalte două ≤ 0. Egalitate avem dacă fiecare termen este 0, adică dacă $c(a-1)(b-1)=a(b-1)(c-1)=b(c-1)(a-1)=0$. Dacă niciunul din numere nu este egal cu 1, atunci trebuie ca $a=b=c=0$, iar dacă măcar unul din numerele a, b, c este egal cu 1, să zicem a, atunci trebuie ca $(b-1)(c-1)=0$, deci trebuie ca încă unul din numere să fie egal cu 1. Prin urmare, egalitate avem dacă $a=b=c=0$ sau dacă două dintre numerele a, b, c sunt egale cu 1, iar cel de-al treilea este orice număr din $[0,1]$.

c) Inegalitatea nu este adevărată pentru orice $a, b, c \geq 0$. De exemplu, pentru $a=0$, $b=c=2$ ea revine la $4 \geq 8$, prin urmare nu este îndeplinită.