Problema 3. Spunem că o mulţime de numere întregi A are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă are cardinalul 3 şi, pentru orice două elemente distincte $a, b \in A$, avem că $a - b \mid a + b$. Demonstraţi că există o infinitate de mulţimi cu proprietatea $(\mathcal{P})$.

Gheorghe Blendea, Iaşi

Soluţie Considerăm mulţimea $A_k = \{2k, 4k, 6k\}$, unde k este un număr întreg nenul.

Dacă luăm elementele $2k$ şi $4k$ avem $4k - 2k \mid 4k + 2k$.

Dacă luăm elementele $2k$ şi $6k$ avem $6k - 2k \mid 6k + 2k$.

Dacă luăm elementele $4k$ şi $6k$ avem $6k - 4k \mid 6k + 4k$.

Prin urmare, mulţimea A_k are proprietatea $(\mathcal{P})$. Cum k este un număr întreg arbitrar, rezultă că există o infinitate de mulţimi cu proprietatea $(\mathcal{P})$.