Problema 1. Aflaţi numărul $\overline{abcd}$, divizibil cu 111, pentru care $\overline{abcd} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$, unde $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$ sunt numere prime, $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ şi $p_4 = \overline{p_1p_2}$.

Răzvan Ceuca

Soluţie: Deoarece $111 = 3 \cdot 37$, $(3, 37) = 1$ şi $111 \mid \overline{abcd}$ rezultă $3 \mid \overline{abcd}$ şi $37 \mid \overline{abcd}$.

Dacă $p_1 = 3$, atunci din $p_2 > 3$ şi $p_4 = \overline{3p_2}$ număr prim, deducem $p_2 = 7$, iar $p_4 = 37$.

Avem aşadar $\overline{abcd} = 3 \cdot 7 \cdot p_3 \cdot 37$ cu $7 < p_3 < 37$, p_3 număr prim.

Dacă $p_3 \geq 13$, atunci $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \geq 10101$. Rezultă $p_3 = 11$ şi atunci $\overline{abcd} = 8547$.

Dacă $p_2 = 3$, atunci din $p_1 < 3$ şi p_1 număr prim deducem $p_1 = 2$, iar $p_4 = 23$ care este număr prim.

Avem $\overline{abcd} = 2 \cdot 3 \cdot p_3 \cdot 23$, cu $3 < p_3 < 23$, p_3 număr prim.

Din ipoteză $\overline{abcd}$ este divizibil cu 37, ceea ce implică $p_3 = 37$. În acastă situaţie nu se respectă condiţia $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$.

Aşadar, în această situaţie nu avem soluţii.

Dacă $p_3 = 3$, atunci condiţiile $p_1 < p_2 < 3$ şi $p_1,\ p_2$ numere prime nu mai sunt îndeplinite, iar dacă $p_4 = 3$, atunci nu este îndeplinită condiţia ca p_4 să aibă două cifre.