P2. Arătaţi că
a) pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$cos(n\alpha) = \begin{vmatrix} cos(\alpha) & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\,cos(\alpha) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\,cos(\alpha) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\,cos(\alpha) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\,cos(\alpha) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\,cos(\alpha) \end{vmatrix}.$$

b) Deduceţi că

$$2\sqrt{2^n}\,cos\left(n \cdot arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right) \in 2\mathbb{Z}+1 \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

R: a) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ notăm

$$\Delta_n(\alpha) = \begin{vmatrix} cos(\alpha) & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\,cos(\alpha) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\,cos(\alpha) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\,cos(\alpha) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\,cos(\alpha) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\,cos(\alpha) \end{vmatrix}$$

şi demonstrăm afirmaţia din enunţ prin inducţie după $n \in \mathbb{N}^*$.
Pentru $n = 1$, avem că $cos(1 \cdot \alpha) = cos(\alpha) = \Delta_1$, iar pentru $n = 2$

$$cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - 1 = \Delta_2(\alpha).$$

Presupunând că egalitatea din enunţ are loc pentru două valori consecutive n şi $n+1$, avem că

$$cos((n+2)\alpha) = 2\,cos(\alpha) \cdot cos((n+1)\alpha) - cos(n\alpha) = 2\,cos(\alpha) \cdot \Delta_{n+1}(\alpha) - \Delta_n(\alpha) = \Delta_{n+2}(\alpha).$$

b) Conform punctului a) are loc egalitatea

$$2\sqrt{2^n}\,cos\left(n \cdot arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2^n}\Delta_n\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

de unde înmulţind prima linie cu $2\sqrt{2}$, a doua coloană cu $\sqrt{2}$, a treia linie cu $\sqrt{2}$, a patra

coloană cu $\sqrt{2}$, etc, obţinem atunci că

$$2\sqrt{2^n}\,cos\left(n\cdot arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=k_n\in\mathbb{Z}.$$

Calculând modulo 2 avem atunci că

$$k_n\equiv\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}\equiv 1(\text{mod } 2)\,,$$

astfel că k_n este impar, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.