Problema 3. Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu proprietatea că există $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, astfel încât $\left|z^p + \frac{1}{z^p}\right| \geq \left|z^q + \frac{1}{z^q}\right|$. Demonstrați că $\left|z + \frac{1}{z}\right| < 2$.

***

Soluție.

Fie $a_n = \left|z^n + \frac{1}{z^n}\right|$, $n \in \mathbb{N}$. Presupunem prin absurd că $a_1 = \left|z + \frac{1}{z}\right| \geq 2$. Atunci $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$ avem $2a_k \leq \left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot \left|z^k + \frac{1}{z^k}\right| = \left|z^{k+1} + \frac{1}{z^{k+1}} + z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}}\right| \leq a_{k+1} + a_{k-1}$ de unde rezultă

$$0 \leq a_1 - 2 \leq a_2 - a_1 \leq \ldots \leq a_p - a_{p-1} \leq \ldots \leq a_q - a_{q-1}, \quad (1).$$

Din (1) obținem imediat că $2 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_p \leq \ldots \leq a_q$ și cum $a_p \geq a_q$, deducem că $a_p = a_{p+1} \ldots = a_q$. Înlocuind în (1) rezultă $0 \leq a_1 - 2 \leq a_2 - a_1 \leq \ldots \leq a_p - a_{p-1} \leq a_{p+1} - a_p = 0$ de unde $a_1 = a_2 = 2$ deci $4 = 2a_1 = \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \left|z^2 + \frac{1}{z^2} + 2\right| \leq \left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| + 2 = a_2 + 2 = 4$ și cum avem egalitate în inegalitatea modulelor, obținem că există $t \geq 0$ cu proprietatea că $z^2 + \frac{1}{z^2} = 2t$.

Trecând la modul, rezultă $t = 1$, de unde $\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 = 0$, deci $z^2 = 1$ sau $z = \pm 1$, ceea ce contrazice faptul că $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. În concluzie, rămâne că $\left|z + \frac{1}{z}\right| < 2$.