



Problema 4. Un număr natural se numește *perfect* dacă toate cifrele sale sunt pătrate perfecte și suma oricăror două cifre alăturate este pătrat perfect.

a) Arătați că un număr perfect de 2015 cifre conține în scrierea sa cel puțin 1007 cifre egale cu 0.

b) Stabiliți câte numere perfecte de 5 cifre există.

Soluție

Cifrele unui număr perfect sunt pătrate perfecte, deci ele iau valori în mulțimea $\{0, 1, 4, 9\}$ (desigur, prima cifră a numărului nu poate fi 0).

Efectuăm toate sumele posibile de cifre din această mulțime, pentru a vedea care sunt pătrate perfecte:

$$0+0=0$$

$$0+1=1$$

$$0+4=4$$

$$0+9=9$$

$$1+1=2$$

$$1+4=5$$

$$1+9=10$$

$$4+4=8$$

$$4+9=13$$

$$9+9=18$$

} sunt pătrate perfecte

} nu sunt pătrate perfecte

(2)

Constatăm că suma a 2 cifre din mulțimea $\{0, 1, 4, 9\}$ este pătrat perfect (\Rightarrow) măcar una din cifre este 0.

Prin urmare, un număr perfect poate avea doar cifrele 0, 1, 4, 9 și dintre oricare 2 cifre alăturate ale sale măcar una este 0. (*)

a) Fie $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{2015}}$, cu $a_1 \neq 0$, un număr perfect de 2015 cifre ($a_1 \in \{1, 4, 9\}$; $a_2, a_3, \dots, a_{2015} \in \{0, 1, 4, 9\}$)

Conform observațiilor de mai sus:

- cum $a_1 \neq 0$, obligatoriu $a_2 = 0$

- dintre a_3 și a_4 măcar una este 0

- dintre a_5 și a_6 măcar una este 0

⋮

- dintre a_{2013} și a_{2014} măcar una este 0

(valoarea lui a_{2015} depinde de valoarea lui a_{2014})

sunt
măcar $2014 : 2 =$
 $= 1007$ cifre nule

Deci orice număr perfect de 2015 cifre conține în scrierea sa cel puțin 1007 cifre egale cu 0.

b) Fie $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$, cu $a_1 \neq 0$ un număr perfect de 5 cifre $\Rightarrow a_1 \in \{1, 4, 9\}$ (3 variante)

(*) \downarrow (*)

$a_2 = 0$

\downarrow (*)

$a_3 \in \{0, 1, 4, 9\}$

③

Distingem cazurile:

I dacă $a_3 = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} a_4 \in \{0, 1, 4, 9\}$

• dacă $a_4 = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} a_5 \in \{0, 1, 4, 9\}$
(4 variante)

\Rightarrow sunt $3 \cdot 4 = 12$ numere
perfecte de 5 cifre cu $a_3 =$
 $= a_4 = 0$

• dacă $a_4 \in \{1, 4, 9\}$ (3 variante) \Rightarrow
 $\stackrel{(*)}{\Rightarrow} a_5 = 0 \Rightarrow$ sunt $3 \cdot 3 = 9$ numere
perfecte de 5 cifre cu $a_3 = 0, a_4 \neq 0$

II dacă $a_3 \in \{1, 4, 9\}$ (3 variante) $\stackrel{(*)}{\Rightarrow} a_4 = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} a_5 \in \{0, 1, 4, 9\} \Rightarrow$
(4 variante)

\Rightarrow sunt $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ numere perfecte de 5 cifre cu $a_3 \neq 0$

Deci în total sunt $12 + 9 + 36 = 57$ numere perfecte
de 5 cifre.