

**Clasa a X-a - Etapa 5**

**Problema 4.** Notăm cu  $C_n$  al  $n$ -lea număr Catalan (vezi materialul bibliografic). Demonstrați că singurele numere Catalan prime sunt  $C_2$  și  $C_3$ .

**Soluție.** Avem  $C_2 = 2$  și  $C_3 = 5$ . Apoi  $C_4 = 14$ , care nu este prim. Presupunem că există  $n > 4$  pentru care  $C_n$  este prim. Din relația

$$(n + 2) C_{n+1} = (4n + 2) C_n$$

avem două cazuri:

*Cazul 1:*  $C_n \mid (n + 2)$  nu este posibil deoarece  $C_n > n + 2$ , pentru  $n > 3$ .

*Cazul 2:*  $C_n \mid C_{n+1}$  implică existența unui  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $C_{n+1} = kC_n$ , deci  $4n + 2 = k(n + 2)$ , deci

$$\frac{4n + 2}{n + 2} \in \mathbb{N},$$

ceea ce este imposibil pentru  $n > 4$ .