Concursul "Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro"
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a V-a

Problema 1. Un număr natural se numeşte *perfect* dacă toate cifrele sale sunt pătrate perfecte şi suma oricăror două cifre alăturate este pătrat perfect.

a) Arătaţi că un număr perfect de 2015 cifre conţine în scrierea sa cel puţin 1007 cifre egale cu 0.

b) Stabiliţi câte numere perfecte de 5 cifre există.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. a) Cifrele care sunt pătrate perfecte sunt 0, 1, 4 şi 9.

Observăm că suma oricăror două cifre nenule, dintre cele de mai sus, nu dau un pătrat perfect.

Deducem că suma a două astfel de cifre este un pătrat perfect dacă cel puţin una dintre ele este 0. .... **3p**

Prima cifră a oricărui număr este diferită de 0. Rămân celelalte 2014 cifre, pe care le grupăm câte două; sunt 1007 grupe. În fiecare grupă cel puţin una dintre cifre trebuie să fie 0 (pentru a avea suma a două cifre alăturate un pătrat perfect).

În concluzie, un număr perfect de 2015 cifre are cel puţin 1007 cifre egale cu 0. .... **1p**

b) Numerele perfecte de 5 cifre pot avea una dintre formele: $\overline{a0b0c}$, $\overline{a00b0}$, $\overline{a0b00}$, $\overline{a000b}$ sau $\overline{a0000}$, unde $a, b, c \in \{1, 4, 9\}$. **1p**

Numere de forma $\overline{a0b0c0}$ avem

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

Pentru fiecare dintre formele $\overline{a00b0}$, $\overline{a0b00}$, $\overline{a000b}$ avem

$$3 \cdot 3 = 9 \text{ (numere)}$$

Numere de forma $\overline{a0000}$ sunt 3.

În concluzie avem $27 + 3 \cdot 9 + 3 = 57$ de numere. **2p**

Problema 2. Un teren agricol are formă dreptunghiulară şi aria de 7,2 ha. O parcelă din acest teren are dimensiunile jumătăţi din dimensiunile terenului, iar o altă parcelă are lungimea egală cu două cincimi din lungimea terenului, lăţimea fiind egală cu lăţimea terenului. Dacă perimetrele acestor două parcele sunt egale, determinaţi perimetrul terenului iniţial.

Monica Sas, Gazeta Matematică

Soluţie. Notăm lungimea terenului iniţial cu $10a$ (pentru a se putea împărţi uşor la 2 şi la 5) şi lăţimea cu $2b$ (pentru a se putea împărţi uşor la 2).

Cu acestea, una dintre parcele are lungimea $5a$ şi lăţimea b ("O parcelă din acest teren are dimensiunile jumătăţi din dimensiunile terenului"), iar cealaltă parcelă are dimensiunile $4a$ şi $2b$ ("o altă parcelă are lungimea egală cu două cincimi din lungimea terenului, lăţimea fiind egală cu lăţimea terenului").

În aceste condiţii prima parcelă are perimetrul $10a + 2b$ iar a doua parcelă are perimetrul $8a + 4b$. **3p**

Cum cele două parcele au perimetrele egale avem $10a + 2b = 8a + 4b$ de unde $a = b$. **1p**

Cu aceasta lungimea terenului iniţial este $10a$, iar lăţimea $2a$. Cum aria terenului este

$$7,2 \text{ ha} = 72000 \text{ m}$$

avem

$$10a \cdot 2a = 72000$$

sau

$$20 \cdot a^2 = 72000$$

de unde

$$a = 60$$

.... **2p**

Obţinem lungimea terenului iniţial 600 m, iar lăţimea 120 m.

Perimetrul terenului iniţial este 1440 m. **1p**

Problema 3. Fie $\overline{ab}$ un număr care verifică relaţia

$$a^5 = 1019 + 4^b + a.$$

Determinaţi numărul $\overline{ab}$.

Soluţie. Dacă $b \neq 0$, atunci 4^b este număr par.

Pentru a număr par membrul stâng al egalităţii este număr par, iar membrul drept al egalităţi este număr impar, ceea ce înseamnă că egalitatea nu are loc.

Pentru a număr impar membrul stâng al egalităţii este număr impar, iar membrul drept al egalităţi este număr par, ceea ce înseamnă că egalitatea nu are loc nici în acest caz.

Deducem, din cele de mai sus, că $b = 0$ şi egalitatea devine

$$a^5 = 1020 + a$$

.... **3p**

Cum a este cifră avem

$$1020 \leq 1020 + a \leq 1029$$

adică

$$1020 \leq a^5 \leq 1029.$$

Dacă $a \leq 3$, atunci $a^5 \leq 243 < 1020$, iar dacă $a \geq 5$, atunci $a^5 \geq 3125 > 1029$.

Rezultă că singura valoare posibilă pentru a este 4. .... **3p**

Dacă $a = 4$, atunci $4^5 = 1024$ şi $1020 + 4 = 1024$, adică $a^5 = 1020 + a$.

Prin urmare, numărul căutat este 40. .... **1p**