CONCURSUL GAZETA MATEMATICĂ ŞI VIITORIOLIMPICI.RO
18-23 AUGUST 2014, CÂMPULUNG MUSCEL

BAREM DE CORECTARE

CLASA A XII-A

Problema 1. Fie $p \in \mathbb{N}$ un număr prim şi

$$P = \{z \in \mathbb{C} |\, \exists n \in \mathbb{N} :\ z^{p^n} = 1\}.$$

Arătaţi că:

a) P este un grup abelian în raport cu operaţia de înmulţire a numerelor complexe;

b) Mulţimea subgrupurilor proprii ale lui P este $\{H_n | n \in \mathbb{N}\}$, unde $H_n = \{z \in \mathbb{C} |\, z^{p^n} = 1\}$.

Soluţie.

a) Cum $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ este un grup abelian, este suficient să arătăm că $P \leq \mathbb{C}^*$. Din definiţie avem că

$$P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\,.$$

De asemenea, pentru orice $z, w \in H_n$ avem că

$$\left(\frac{z}{w}\right)^{p^n} = \frac{z^{p^n}}{w^{p^n}} = 1\,,$$

astfel că $H_n \leq \mathbb{C}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Cum

$$H_0 < H_1 < \cdots < H_n < \dots\,,$$

obţinem că $P \leq \mathbb{C}^*$, şi prin urmare P este un grup abelian.

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, subgrupul H_n este ciclic, generat de orice element $z \in H_n \setminus H_{n-1}$. În plus,

$$P = H_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (H_n \setminus H_{n-1})\,.$$

Fie acum $S \leq P$ un subgrup al lui P.

• Dacă S este finit, atunci $S = H_0$ sau există un $n \in \mathbb{N}^*$ maxim cu proprietatea că $S \cap (H_n \setminus H_{n-1}) \neq \emptyset$. Rezultă că $S \leq H_n = \langle S \cap (H_n \setminus H_{n-1})\rangle \leq S$, astfel că $S = H_n$.

• Dacă S este infinit, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $m \in \mathbb{N}^*$ cu $m \geq n$ astfel încât $S \cap (H_m \setminus H_{m-1}) \neq \emptyset$. Dar atunci $H_n \leq H_m \leq S$ şi rezultă că

$$P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \leq S \leq P\,,$$

deci $S = P$.

Prin urmare, mulţimea subgrupurilor proprii ale lui P este $\{H_n |\, n \in \mathbb{N}\}$.

Problema 2. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}(x)^n \mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{2n} \mathrm{d}x}\,.$$

Gazeta Matematică

Soluţie.

Notăm $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg(x)^n\, dx$, respectiv $J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)^n\, dx$, astfel că trebuie să calculăm limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{J_{2n}}\,.$$

Evident, $I_n > I_{n+1} > 0$ şi $J_n > J_{n+1} > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Deoarece $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că au loc inegalităţile

$$\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2} < 2I_n < I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \quad , \forall n \geq 2.$$

Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2}$.
Pentru şirul (J_n) avem că $J_0 = \frac{\pi}{2}$, $J_1 = 1$ şi este verificată relaţia de recurenţă

$$J_n = \frac{n-1}{n} \cdot J_{n-2} \quad , \forall n \geq 2.$$

Obţinem că

$$J_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad J_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Rezultă că $nJ_nJ_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Obţinem inegalităţile

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{n}{n+1} \cdot (n+1)J_nJ_{n+1} < nJ_n^2 < nJ_nJ_{n-1} = \frac{\pi}{2}\,,$$

de unde avem că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}J_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Dar atunci $\lim\limits_{n\to\infty} nJ_{2n} = \infty$ şi obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{J_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{nI_n}{nJ_{2n}} = \frac{\frac{1}{2}}{\infty} = 0.$$

Problema 3. Determinaţi toate polinoamele monice ireductibile de grad cel mult 4 din $\mathbb{Q}[X]$ cu proprietatea că pentru orice rădăcină $z \in \mathbb{C}$ a polinomului, z^2 este de asemenea o rădăcină.

Soluţie.

Fie P un polinom care verifică toate condiţiile din enunţ.

• Dacă P are rădăcina $z = 0$, atunci $X|P$, şi cum P este ireductibil, rezultă că $P = X$.

• Dacă rădăcinile lui P sunt nenule, fie Z_P mulţimea rădăcinilor lui P şi $z \in Z_P$ o rădăcină. Conform ipotezei, $card(Z_P) \leq grad(P) \leq 4$, iar $\{z, z^2, z^4, z^8, \dots\} \subseteq Z_P$. Rezultă că z este o rădăcină a unităţii. Dacă n este ordinul lui z în $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, iar Φ_n al $n-$lea polinom ciclotomic, atunci $\Phi_n|P$ şi din ireductibilitatea lui P rezultă că $P = \Phi_n$. Cum z^2 este de asemenea o rădăcină de ordin n a unităţii, rezultă că $(n, 2) = 1$, iar cum $grad(P) \leq 4$, obţinem că $\varphi(n) = grad(\Phi_n) \leq 4$. Numerele n care satisfac cele două condiţii de mai sus sunt $1, 3, 5$. Obţinem că $P = X - 1$, $P = X^2 + X + 1$ sau $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Prin urmare, mulţimea polinoamelor care satisfac condiţiile din enunţ este

$$\{X, X-1, X^2+X+1, X^4+X^3+X^2+X+1\}.$$