ŞIRURI - RELAŢII DE RECURENŢĂ

ABSTRACT. Această lecţie din ciclul pentru liceu prezintă câteva idei pentru rezolvarea relaţiilor de recurenţă.

Lecţia se adresează claselor IX, X.
Data: 27 noiembrie 2009.
Autor: Dan Schwarz, Comisia de Probleme ONM.

1. INTRODUCERE ŞI NOTAŢII

1.1. **Introducere.** Şiruri de numere pot avea o metodă simplă de a exprima termenul lor general, de exemplu şirul $1, 2, 3, \ldots$, formal $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = n$; sau dimpotrivă, o formulă generală este greu de dat, sau lipseşte cu desăvârşire, de exemplu şirul $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$, formal $(p_n)_{n\geq 1}$ definit prin $p_n =$ al n-lea număr prim pozitiv. Foarte des, un şir este dat prin câţiva primi termeni consecutivi, urmaţi de o formulă care dă valoarea unui termen în funcţie de câţiva dintre termenii precedenţi, de exemplu celebrul şir Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, formal $(f_n)_{n\geq 1}$ definit prin $f_1 = f_2 = 1$ şi relaţia $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ pentru $n \geq 1$. O astfel de relaţie între termeni ai şirului se numeşte *relaţie de recurenţă*; când coeficienţii sunt constanţi, iar termenii şirului apar "ca atare" (şi nu în expresii fracţionare sau de puteri), relaţia se zice *liniară*.

1.2. **Notaţii şi Metode.** Teoria generală pentru astfel de şiruri (pe care doar o voi expune pe scurt, şi în cazuri particulare) asociază şirului o funcţie numită *polinom caracteristic*, ale cărei rădăcini sunt folosite în a construi formula termenului general al şirului. De exemplu, pentru şirul Fibonacci, polinomul caracteristic este $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Teoria spune atunci că $f_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, unde coeficienţii c_1 şi c_2 se pot calcula din valorile (cunoscute) ale primilor doi termeni ai şirului.

Desigur că cel mai simplu caz ar fi un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1} = cx_n$. În acest caz nu avem nevoie de nicio teorie; este clar că $x_n = cx_{n-1} = c^2x_{n-2} = \cdots = c^{n-1}x_1 = c^{n-1}a$.

Dar dacă relaţia de recurenţă este $x_{n+1} = cx_n + b$? O idee ar fi să încercăm să reducem problema la cazul precedent. Să "inventăm" un şir $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_n = y_n + d$, ceea ce duce la relaţia $y_{n+1} + d = c(y_n + d) + b$, adică $y_{n+1} = cy_n + (b + d(c - 1))$, şi să alegem d astfel ca $b + d(c - 1) = 0$, ceea ce într-adevăr ar reduce problema la cazul precedent, şi deci $x_n = y_n + d = c^{n-1}y_1 + d = c^{n-1}(a - d) + d$. Dar cerinţa $b + d(c - 1) = 0$ poate fi rezolvată prin $d = \frac{b}{1-c}$ numai dacă $c \neq 1$. Când $c = 1$, relaţia iniţială se scrie $x_{n+1} = x_n + b$, şi putem iarăşi uşor găsi formula generală, căci $x_n = x_{n-1} + b = x_{n-2} + 2b = \cdots = x_1 + (n-1)b = a + (n-1)b$.

Un alt fel de a vedea lucrurile este de a ignora, pentru moment, valorile termenilor iniţiali, şi a considera toate şirurile care respectă relaţia de recurenţă dată. Fie $(x'_n)_{n\geq 1}$ şi $(x''_n)_{n\geq 1}$ două astfel de şiruri. Ce relaţie de recurenţă îndeplineşte şirul "diferenţă" dat de $\delta_n = x'_n - x''_n$? Se vede imediat că scăzând relaţiile $x'_{n+1} = cx'_n + b$ şi $x''_{n+1} = cx''_n + b$ se obţine relaţia $\delta_{n+1} = c\delta_n$, care este cazul simplu analizat la început. Această metodă se numeşte *omogenizarea* relaţiei date. Nu este greu de văzut atunci că orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$ care satisface relaţia iniţială este dat de $x_n = \delta_n + \varphi_n$, unde şirul $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ este o soluţie particulară oarecare a relaţiei date.

Mai departe, şi dacă relaţia de recurenţă este $x_{n+1} = cx_n + n$? În acest caz coeficienţii nu mai sunt constanţi. Metoda omogenizării funcţionează la fel de bine. Cealaltă trebuie uşor modificată; vom "inventa" un şir $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_n = y_n + d_n$, ceea ce duce la relaţia $y_{n+1} + d_{n+1} = c(y_n + d_n) + n$, adică $y_{n+1} = cy_n + (n + cd_n - d_{n+1})$, şi să alegem d_n astfel ca $n + cd_n = d_{n+1}$, ceea ce într-adevăr ar reduce problema la cazul precedent. Dar de fapt găsirea şirului d_n reprezintă găsirea soluţiei particulare la care ne refeream mai sus! Acest lucru se face căutând $d_n = \alpha n + \beta$; atunci relaţia devine $n + c(\alpha n + \beta) = \alpha(n+1) + \beta$, sau $n(1 + (c-1)\alpha) + (c-1)\beta - \alpha = 0$, ceea ce conduce la $\alpha = (c-1)\beta$ şi $(c-1)\alpha = -1$.

Pentru $c \neq 1$, se pot calcula uşor α şi β. Pentru $c = 1$, relaţia este $d_{n+1} = d_n + n$, care conduce uşor la $d_n = d_1 + n(n-1)/2$.

2. Aplicaţii

Problema 1. Determinaţi formula termenului general al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin $x_1 = 1$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1} = 3x_n + n - 1$, pentru $n \geq 1$.

Soluţie. Avem $\left(x_{n+1} + \frac{n+1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 3\left(x_n + \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)$, de unde prin iterare $x_{n+1} + \frac{n+1}{2} - \frac{1}{4} = 3^n\left(x_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$; finalmente $x_n = \dfrac{5 \cdot 3^{n-1} - 2n + 1}{4}$.

O altă metodă este să scriem două instanţe consecutive ale relaţiei de recurenţă $x_{n+1} = 3x_n + n - 1$ şi $x_n = 3x_{n-1} + n - 2$ şi să le scădem, obţinând $x_{n+1} = 4x_n - 3x_{n-1} + 1$. $\square$

Problema 2. Determinaţi formula termenului general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ dat prin $a_1 = \frac{4}{3}$ şi relaţia de recurenţă $2a_n = a_{n-1} - n5^n + 2^n$, pentru $n \geq 2$.

Soluţie. Căutăm $a_n = b_n + \alpha 2^n$, deci $2b_n + \alpha 2^{n+1} = b_{n-1} + \alpha 2^{n-1} - n5^n + 2^n$ şi cerem ca $\alpha 2^{n+1} = \alpha 2^{n-1} + 2^n$, adică $\alpha = \frac{2}{3}$. Acum căutăm $b_n = c_n + (n\beta + \gamma)5^n$, deci $2c_n + 2(n\beta + \gamma)5^n = c_{n-1} + ((n-1)\beta + \gamma)5^{n-1} - n5^n$ şi cerem ca $10(n\beta + \gamma) = (n-1)\beta + \gamma - 5n$ pentru toţi n, adică $9\beta = -5$ şi $9\gamma = -\beta$, adică $\beta = -\frac{5}{9}$ şi $\gamma = \frac{5}{81}$. Rezultă că $2c_n = c_{n-1}$, deci $c_n = \frac{1}{2^{n-1}}c_1$. Prin urmare $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}c_1 - (\frac{5}{9}n - \frac{5}{81})5^n + \frac{2}{3}2^n$. Din $a_1 = \frac{4}{3}$ rezultă $c_1 = \frac{200}{81}$, deci $a_n = \frac{25}{81}2^{-(n-4)} - (\frac{1}{9}n - \frac{1}{81})5^{n+1} + \frac{1}{3}2^{n+1}$. $\square$

Problema 3. Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este definit prin $a_0 = a_1 = 1$ şi relaţia de recurenţă $a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1}$, pentru $n \geq 1$. Demonstraţi că $2a_n - 1$ este pătrat perfect pentru fiecare $n \geq 0$.

Soluţie. Metoda brutală de a exprima termenul general funcţionează! Polinomul caracteristic al şirului este $\lambda^2 - 14\lambda + 1 = 0$, cu rădăcinile $7 \pm 4\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})^2$. Prin urmare, după determinarea coeficienţilor (din valorile primilor doi termeni), formula generală este

$$a_n = \frac{1}{4}\left((2+\sqrt{3})^{2n-1} + (2-\sqrt{3})^{2n-1}\right).$$

Rezultă atunci că $2a_n - 1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(2+\sqrt{3})^{2n-1}} - \sqrt{(2-\sqrt{3})^{2n-1}}\right)^2$, căci $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$.

Dar $(2+\sqrt{3})^{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}(\sqrt{3}+1)^{2(2n-1)} = 2\left(\frac{1}{2^n}(\sqrt{3}+1)^{2n-1}\right)^2$ şi apoi $(2-\sqrt{3})^{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}(\sqrt{3}-1)^{2(2n-1)} = 2\left(\frac{1}{2^n}(\sqrt{3}-1)^{2n-1}\right)^2$. Prin urmare $2a_n - 1 = \left(\frac{(\sqrt{3}+1)^{2n-1} - (\sqrt{3}-1)^{2n-1}}{2^n}\right)^2$. Rămâne să verificăm că pătratul acestei valori este număr întreg.

Să notăm $A = \sqrt{3}+1$ şi $B = \sqrt{3}-1$. Avem $A^2 + B^2 = 8$ şi $A^2B^2 = 4$. Dar $A^{2n+1} - B^{2n+1} = (A^2+B^2)(A^{2n-1} - B^{2n-1}) - A^2B^2(A^{2n-3} - B^{2n-3})$, deci $\frac{A^{2n+1} - B^{2n+1}}{2^{n+1}} = 4\frac{A^{2n-1} - B^{2n-1}}{2^n} - \frac{A^{2n-3} - B^{2n-3}}{2^{n-1}}$, şi rezultatul este demonstrat prin inducţie.

De fapt am arătat că $2a_n - 1 = b_n^2$, cu şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ dat prin $b_0 = -1$, $b_1 = 1$ şi $b_{n+1} = 4b_n - b_{n-1}$. (Această relaţie de recurenţă se pretează la multe alte proprietăţi şi rezultate, şi a fost deseori folosită - vezi şi testele de selecţie 2006, cu soluţii disponibile în Romanian Mathematical Competitions (RMC), o unealtă de nelipsit pentru studiul problemelor de olimpiadă.) $\square$

3. Probleme Avansate

Următorul rezultat este mai mult decât o simplă problemă; este unul dintre puţinele rezultate de matematică elementară ale celebrului şi genialului matematician indian Srinivasa Ramanujan.

Problema 4. (Ramanujan).

Demonstraţi că $\sqrt{1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots}}}} = 2$.

Soluţie. Să notăm, pentru $x > 0$

$$f_n(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + \cdots + (x+n-1)\sqrt{1 + (x+n)}}}}$$

şi cu $g_n(x)$ formula în care ultimul radical imbricat $\sqrt{1 + (x+n)}$ a fost înlocuit cu $\sqrt{1 + (x+n)(x+n+2)}$. Se vede imediat că $g_n(x) = x + 1$, deoarece $1 + (x+n)(x+n+2) = (x+n+1)^2$, şi se telescopează. Pe de altă parte, $x+1 = g_n(x) > f_n(x) > f_{n-1}(x) > \cdots > f_0(x) = \sqrt{1+x}$, deci şirul $(f_n(x))_{n\geq 0}$ este crescător şi mărginit superior de $x+1$.

Dar $f_n(x)^2 = 1+xf_{n-1}(x+1)$, de asemenea $g_n(x)^2 = 1+xg_{n-1}(x+1)$, deci $g_n(x)-f_n(x) = x\frac{g_{n-1}(x+1)-f_{n-1}(x+1)}{g_n(x)+f_n(x)} < \frac{x}{(x+1)+\sqrt{x+1}}(g_{n-1}(x+1)-f_{n-1}(x+1))$. Prin iterare obţinem $g_n(x)-f_n(x) < \prod_{k=0}^{n-1}\frac{x+k}{(x+k+1)+\sqrt{x+k+1}}(g_0(x+n)-f_0(x+n)) = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{x+k}{(x+k)+\sqrt{x+k}}\left(\frac{x}{(x+n)+\sqrt{x+n}}((x+n+1)-\sqrt{x+n+1})\right)$. Acum, $\frac{x}{(x+n)+\sqrt{x+n}}((x+n+1)-\sqrt{x+n+1}) < x$, în timp ce avem inegalitatea $\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(x+k)+\sqrt{x+k}}{x+k} > 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{x+k}} > 1+(n-1)\frac{1}{\sqrt{x+n-1}} > 1+\sqrt{(n-1)/2}$ pentru $n > x+1$.

Aceasta înseamnă că $0 < (x+1)-f_n(x) < \frac{x}{1+\sqrt{(n-1)/2}}$ pentru orice n, însă cantitatea din dreapta devine din ce în ce mai mică, deci "la limită" $f_n(x)$ devine $x+1$. Pentru $x=1$ se obţine deci valoarea 2. $\square$